# - Correction -
# TAC : quelques exercices pour améliorer son niveau en calcul

Valentin Bahier

19/03/2020

**Exercice 1 (*Dériver*)**

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{\ln(x^5)}\right)^3, \qquad f_2(x) = \sin(\cos^2 x), \qquad f_3(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}},$$
$$f_4(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad f_5(x) = \exp(\tan(2x)), \quad f_6(x) = \frac{1}{\cos(\cos x)},$$
$$f_7(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4x}}, \quad f_8(x) = \frac{1}{x^2+1}\sum_{k=0}^{5} x^k.$$

- $f_1'(x) = 3u'u^2$ où $u = \dfrac{x^2}{\ln(x^5)} = \dfrac{x^2}{5\ln(x)}$ donc $u' = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2x\ln x - x^2 \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$, donc
$$\boxed{f_1'(x) = \frac{3x^5(2\ln x - 1)}{125(\ln x)^4}}.$$
- $f_2'(x) = u' \sin'(u)$ où $u = \cos^2 x$ donc $u' = -2\sin x \cos x$, donc
$$\boxed{f_2'(x) = -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x)}.$$
- $f_3'(x) = \dfrac{1}{2}u'u^{\frac{1}{2}-1}$ où $u = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ donc $u' = -\dfrac{2}{x^3}$, donc $f_3'(x) = -\dfrac{1}{x^3} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ c'est-à-dire
$$\boxed{f_3'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}}.$$

- $f_4'(x) = u' \arctan'(u)$ où $u = \dfrac{1}{x^3}$ donc $u' = -\dfrac{3}{x^4}$, donc $f_4'(x) = -\dfrac{\frac{3}{x^4}}{1+\left(\frac{1}{x^3}\right)^2}$ c'est-à-dire
$$\boxed{f_4'(x) = -\frac{3x^2}{x^6+1}}.$$

- $f_5'(x) = u' \exp(u)$ où $u = \tan(2x)$ donc $u' = 2\tan'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$, donc
$$\boxed{f_5'(x) = \frac{2}{\cos^2 x}\exp(\tan(2x))}.$$

- $f_6'(x) = -\dfrac{u'}{u^2}$ où $u = \cos(\cos x)$ donc $u' = -\sin x \times (-\sin(\cos x)) = \sin x \sin(\cos x)$, donc
$$\boxed{f_6'(x) = -\frac{\sin x \sin(\cos x)}{\cos^2(\cos x)}}.$$

- $f_7'(x) = \dfrac{1}{2}u' u^{\frac{1}{2}-1}$ où $u = 1+\sqrt{1+4x}$ donc $u' = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$, donc $f_7'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}$ c'est-à-dire
$$\boxed{f_7'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+4x)(1+\sqrt{1+4x})}}}.$$

- Avant de dériver $f_8$, simplifions son expression. Par division euclidienne,
$$f_8(x) = x^3 + x^2 + \frac{x+1}{x^2+1}.$$
La dérivée du dernier terme donne $\dfrac{x^2+1-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$ donc
$$\boxed{f_8'(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}}.$$

**Exercice 2** (***Intégrer***)

$$\boxed{\begin{array}{llll} I_1 = \displaystyle\int_0^\pi t^3 \cos t \mathrm{d}t, & I_2 = \displaystyle\int_1^2 t \ln t \mathrm{d}t, & I_3 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t, & I_4 = \displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t^3}\mathrm{d}t, \\ I_5 = \displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t, & I_6 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t, & I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{2t+1}}\mathrm{d}t, & I_8 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1-\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t. \end{array}}$$

- En intégrant par parties, $I_1 = \left[t^3 \sin t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 3t^2 \sin t \mathrm{d}t = 0 - 3\int_0^{\pi} t^2 \sin t \mathrm{d}t$.
  On intègre par parties une nouvelle fois

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin t \mathrm{d}t = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2t \cos t \mathrm{d}t = \pi^2 + 2\int_0^{\pi} t \cos t \mathrm{d}t.$$

  On intègre par parties une dernière fois

$$\int_0^{\pi} t \cos t \mathrm{d}t = [t \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = 0 - [-\cos t]_0^{\pi} = -2.$$

  Finalement, $I_1 = -3(\pi^2 + 2 \times (-2))$, c'est-à-dire

$$\boxed{I_1 = -3\pi^2 + 12}.$$

- En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_2 = \int_1^2 \underbrace{t}_{u} \underbrace{\ln t}_{v'} \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2} \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 t \mathrm{d}t \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire

$$\boxed{I_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}}.$$

- En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_3 = \int_1^3 \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'} \underbrace{\ln t}_{v} \mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t} \ln t\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{t} \times \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln 3}{3} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^3 \end{aligned}$$

  donc

$$\boxed{I_3 = \frac{2 - \ln 3}{3}}.$$

- Remarquons que $t^2\exp(-t^3)$ est de la forme $u'\exp(u)$ à une constante multiplicative près.

  La dérivée de $-t^3$ étant $-3t^2$, alors $I_4 = -\dfrac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-t^3}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{-1}-1)$, c'est-à-dire

$$\boxed{I_4 = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{3}}.$$

- On applique le changement de variables $x=\sqrt{t}$, c'est-à-dire $t=x^2$. Quand $t$ vaut 0, $x$ aussi ; et quand $t$ vaut 4, $x$ vaut $\sqrt{4}=2$. De plus, $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$. On a donc

$$I_5 = \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\times 2x\mathrm{d}x = 2\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

  Or, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'}\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-2} + 1 = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}\end{aligned}$$

  donc

$$\boxed{I_5 = 2 - \frac{6}{\mathrm{e}^2}}.$$

- Posons le changement de variables $t = \sin x$. Alors quand $t$ vaut 0, $x$ aussi ; et quand $t$ vaut 1, $x$ vaut $\pi/2$, donc

$$\begin{aligned} I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} |\cos x|\cos x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\mathrm{d}x \qquad \text{car } \cos x \geq 0 \text{ sur } [0,\pi/2].\end{aligned}$$

  Or $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, donc

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}}_{=0}\end{aligned}$$

  c'est-à-dire

$$\boxed{I_6 = \frac{\pi}{4}}.$$

- On applique un changement de variables en posant $x = 2t+1$, ce qui revient à $t = \dfrac{x-1}{2}$.

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_1^3 \frac{\frac{x-1}{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}+2\right) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I_7 = \frac{1}{3}}.$$

- Encore un changement de variables en posant cette fois $x = \mathrm{e}^t$, c'est-à-dire $t = \ln x$.

$$I_8 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x^2}{1-x} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{1-x}\mathrm{d}x$$

avec $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x-1+1}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}$.

Or

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = [-\ln(1-x)]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \ln(1-\mathrm{e}) - \ln(1-\mathrm{e}^2).$$

Donc

$$\boxed{I_8 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^2 + \ln\left(\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^2}\right)}.$$

## Exercice 3 (*Inverser*)

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } ad - bc \neq 0,$$

$$P_8 = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}.$$

En cours nous avons vu essentiellement quatre méthodes.

| Matrices | Méthode conseillée |
|---|---|
| $P_1, P_2, P_7$ | formule d'inversion impliquant la comatrice |
| $P_3$ | inversion d'un système linéaire |
| $P_4, P_5, P_6$ | méthode de Gauss en disposant la matrice identité à droite |
| $P_8$ | trouver un polynôme annulateur |

$$P_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_2^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_4^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -17 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad P_5^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & -15 & -29 & 55 \\ 0 & 9 & 12 & -33 \\ 0 & 0 & 18 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{pmatrix}$$

$$P_6^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & 36 & 20 \\ 3 & 9 & -33 & -18 \end{pmatrix} \qquad P_7^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$P_8^{-1} = \frac{1}{a^2+4a}\begin{pmatrix} a+3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a+3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a+3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & a+3 \end{pmatrix}$$

## Exercice 4 (*Développer*)

1) $\mathrm{DL}_3(0)$ : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$

2) $\mathrm{DL}_4(0)$ : $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$

3) $\mathrm{DL}_5(0)$ : $x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$

4) $\mathrm{DL}_4(0)$ : $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$

5) $\mathrm{DL}_6(0)$ : $x \mapsto \ln(1+\sin x)$

6) $\mathrm{DL}_5(0)$ : $x \mapsto \arcsin x - \arccos x$

7) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^{x^x}\ln x}{x^x - 1}$

8) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$

1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3),\quad \mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$
donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\mathrm{e}^x &= \cancel{1}+\cancel{x}+x^2+x^3-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\ &= \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\cos(x)\ln(1+x) &= \left(1-\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{x^4}{24}+o(x^4)}_{=o(x^3)}\right)\left(\underline{\underline{x}}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cancel{\frac{x^4}{4}}-\frac{x^3}{2}+\cancel{\frac{x^4}{4}}+o(x^4)\\ &= \boxed{x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}\end{aligned}$$

3) $(\cos x)^{\sin x}=\exp(\sin(x)\ln(\cos x))$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^5)\end{aligned}$$

Le développement limité de $\ln(\cos x)$ commence par un terme de degré 2 donc il suffit de considérer le développement de $\sin x$ à l'ordre $5-2=3$. De même, le développement limité de $\sin x$ commence par un terme de degré 1 donc pour $\ln(\cos x))$ il suffit d'aller à l'ordre $5-1=4$.

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\\ &= -\frac{x^3}{2}-\cancel{\frac{x^5}{12}}+\cancel{\frac{x^5}{12}}+o(x^5).\end{aligned}$$

En posant $u$ cette dernière quantité, alors quand $x$ tend vers 0, $u$ aussi, et on a $u^2=o(x^5)$, donc

$$\exp(u)=1+u+o(x^5)$$

d'où

$$(\cos x)^{\sin x}=\boxed{1-\frac{x^3}{2}+o(x^5)}.$$

4)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\\
&= 1+u+u^2+o(x^4) \quad \text{où } u=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\\
&= \boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)}.
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin x) &= \ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\\
&= u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}+o(x^6) \quad \text{où } u=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\
&= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}+\frac{x^6}{36}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{x^5}{3}-\frac{x^5}{6}\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\left(x^4-\frac{2}{3}x^6\right)+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\\
&= \boxed{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{24}x^5-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)}
\end{aligned}$$

6) On démarre de la dérivée qu'on développe à l'ordre immédiatement inférieur puis on en prendra la primitive.

$$\begin{aligned}
(\arcsin x-\arccos x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=2(1-x^2)^{-1/2}\\
&= 2\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)}{2}x^4+o(x^4)\right)\\
&= 2+x^2+\frac{3}{4}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\arcsin x-\arccos x &= \arcsin 0-\arccos 0+2x+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{20}x^5+o(x^5)\\
&= \boxed{-\frac{\pi}{2}+2x+\frac{x^3}{3}+\frac{3}{20}x^5+o(x^5)}.
\end{aligned}$$

7) D'une part,

$$\begin{aligned}x^{x^x} = x^{\exp(x\ln x)} &= \exp(\exp(x\ln x)\ln x)\\ &= \exp((1+x\ln x+o(x\ln x))\ln x)\\ &= x\exp(x(\ln x)^2+o(x(\ln x)^2))\\ &= x(1+o(1)).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}x^x-1 &= \exp(x\ln x)-1 = \cancel{1}+x\ln x+o(x\ln x)-\cancel{1}\\ &= x\ln x(1+o(1)).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1} = \frac{\cancel{x}(1+o(1))\cancel{\ln x}}{\cancel{x\ln x}(1+o(1))} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \boxed{1}.$$

8)

$$\ln(1+x) = \ln x+\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{=} \ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &\underset{+\infty}{=} \exp\left(x\ln x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(x\ln x\left(\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)\\ &= \exp(1+o(1))\\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1) = \boxed{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

**Exercice 5 (*Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2*)**

$$f_1(x,y)=\mathrm{e}^{xy^2}+x^3,\quad f_2(x,y,z)=\cos(xy-z),\quad f_3(x,y)=\sin(\sin(x-y)),$$
$$f_4(x,y)=\frac{y}{\ln(1+x^2)},\quad f_5(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad f_6(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{y-x}}{\mathrm{ch}(x+y)},$$
$$f_7(x,y,z)=x^{y^z}\text{ pour } x,y>0,\quad f_8(x,y)=g(x^2+2xy,y\mathrm{e}^{-x},y)\text{ où } g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3).$$

Toutes les fonctions de cet exercice sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition, donc en particulier les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et d'après le théorème de Schwarz les dérivées partielles secondes croisées sont égales.

| | $f_1$ | $f_3$ |
|---|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ | $y^2 e^{xy^2}+3x^2$ | $\cos(x-y)\cos(\sin(x-y))$ |
| $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ | $2xye^{xy^2}$ | $-\cos(x-y)\cos(\sin(x-y))$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ | $y^4 e^{xy^2}+6x$ | $-\cos(\sin(x-y))\sin(x-y)-\cos^2(x-y)\sin(\sin(x-y))$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ | $2x(1+xy^2)e^{xy^2}$ | $-\cos(\sin(x-y))\sin(x-y)-\cos^2(x-y)\sin(\sin(x-y))$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ | $2y(1+xy^2)e^{xy^2}$ | $\cos(\sin(x-y))\sin(x-y)+\cos^2(x-y)\sin(\sin(x-y))$ |

| | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ | $-\frac{2xy}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}$ | $\frac{1+xy+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ | $-\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+e^{-2y})^2}$ |
| $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ | $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ | $\frac{-1-xy-x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ | $\frac{4e^{-2y}}{(e^{2x}+e^{-2y})^2}$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ | $\frac{2y(4x^2+(-1+x^2)\ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2\ln^3(1+x^2)}$ | $\frac{y-2x^2y+y^3-3x(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}$ | $\frac{8e^{2x}(e^{2x}-e^{-2y})}{(e^{2x}+e^{-2y})^3}$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ | $0$ | $\frac{-x^3+3y+3x^2y+x(-1+2y^2)}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}$ | $-\frac{8e^{-2y}(e^{2x}-e^{-2y})}{(e^{2x}+e^{-2y})^3}$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ | $-\frac{2x}{(1+x^2)\ln^2(1+x^2)}$ | $\frac{x+x^3+2x^2y-2xy^2-y(1+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}$ | $-\frac{16e^{2x-2y}}{(e^{2x}+e^{-2y})^3}$ |

| | $f_8$ |
|---|---|
| $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ | $2(x+y)\frac{\partial g}{\partial u}(\dots)-ye^{-x}\frac{\partial g}{\partial v}(\dots)$ |
| $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ | $2x\frac{\partial g}{\partial u}(\dots)+e^{-x}\frac{\partial g}{\partial v}(\dots)+\frac{\partial g}{\partial w}(\dots)$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ | $2\frac{\partial g}{\partial u}(\dots)+ye^{-x}\frac{\partial g}{\partial v}(\dots)+4(x+y)^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\dots)-4y(x+y)e^{-x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(\dots)+y^2e^{-2x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(\dots)$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ | $\left[4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+e^{-2x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}+4xe^{-x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4x\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial w}-2e^{-x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial w}\right](\dots)$ |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ | $\left[2\frac{\partial g}{\partial u}-e^{-x}\frac{\partial g}{\partial v}+4x(x+y)\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-ye^{-2x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right.$ $\left.+2(x+y-xy)e^{-x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2(x+y)\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial w}-ye^{-x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial w}\right](\dots)$ |

| | $f_2$ | $f_7$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ | $-y\sin(xy-z)$ | $y^z x^{y^z-1}$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ | $-x\sin(xy-z)$ | $z\ln(x)y^{z-1}x^{y^z}$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ | $\sin(xy-z)$ | $\ln(x)\ln(y)y^z x^{y^z}$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)$ | $-y^2\cos(xy-z)$ | $y^z(y^z-1)x^{y^z-2}$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)$ | $-x^2\cos(xy-z)$ | $z\ln(x)y^{z-2}x^{y^z}(z\ln(x)y^z+z-1)$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$ | $-\cos(xy-z)$ | $\ln(x)\ln^2(y)y^z x^{y^z}(\ln(x)y^z+1)$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)$ | $-\sin(xy-z)-xy\cos(xy-z)$ | $zy^{z-1}x^{y^z-1}(\ln(x)y^z+1)$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)$ | $y\cos(xy-z)$ | $y^z\ln(y)x^{y^z-1}(\ln(x)y^z+1)$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z)$ | $x\cos(xy-z)$ | $\ln(x)y^{z-1}x^{y^z}(z\ln(y)(\ln(x)y^z+1)+1)$ |