Diagonalisation et applications

12SCI02

V. Bahier, A. Boudiaf, K. Chaib, W. Damin

2019-2020

PURPAN
ÉCOLE D'INGÉNIEURS
Sciences du vivant | Agriculture
Agroalimentaire | Marketing | Management

Plan

Diagonalisation des matrices carrées

- Spectre, éléments propres
- Sous-espaces propres
- Polynôme caractéristique
- Matrices diagonalisables
- Cas particuliers importants
- Extension : triangularisation d'une matrice carrée

Puissances d'une matrice

- Problématique
- Exemples de calculs de puissance sans diagonalisation
- Calculs de puissance en utilisant la diagonalisation
- Cas d'une suite vérifiant une récurrence linéaire
- Cas de plusieurs suites vérifiant une récurrence linéaire entre elles

Plan

Plan

Valeur propre, vecteur propre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définitions

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Un réel λ est appelé **valeur propre** de A s'il existe un **vecteur** (*i.e.* une **matrice colonne**) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que :

$$AX = \lambda X.$$

Un tel vecteur X est alors appelé **vecteur propre** de A.
L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A et est noté $\mathrm{Sp}\,(A)$.

Exemple

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si l'on considère $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5X.$$

Donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5. Ainsi $5 \in \mathrm{Sp}\,(A)$.

Exercice 1

On reprend $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

Déterminer sa valeur propre associée.

Plan

Définition d'un sous-espace propre

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A.
On appelle **sous-espace propre** de A **associé à la valeur propre** λ l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\, AX = \lambda X\}\,.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ, auquel on a rajouté la matrice colonne nulle car si $O_{n,1}$ désigne la matrice colonne constituée que de 0,
$AO_{n,1} = \lambda O_{n,1}$ pour tout λ et donc $O_{n,1} \in E_\lambda(A)$.

Exemple

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 5$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Supposons que $X \in E_5(A)$. Alors :

$$AX = 5X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ x + 3y + z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

Cela se traduit par le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + y + z & = & 5x \\ x + 3y + z & = & 5y \\ x + y + 3z & = & 5z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -2x + y + z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ x + y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Notons alors L_1, L_2 et L_3 les lignes de ce système.

1/2

$L_2 + L_3$ donne $-L_1$. Donc, une des trois équations du système est inutile. Si l'on fait la différence $L_1 - L_2$, on obtient :
$-3x + 3y = 0$, c'est-à-dire $x = y$.
Puis, L_2 donne : $z = -x + 2y = y$.
On remarque que si l'on utilise alors les égalités $x = y = z$ dans L_3, on a : $0 = 0$.
On peut conclure :

$$E_5(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}, \, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \, y \in \mathbb{R} \right\} = \{ y\, X_1, \, y \in \mathbb{R} \},$$

en posant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés d'un sous-espace propre

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Alors si X et Y appartiennent à $E_\lambda(A)$, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY \in E_\lambda(A)$.
On dit alors que $E_\lambda(A)$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$.

En effet, si X et Y appartiennent à $E_\lambda(A)$, alors pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(aX + bY) = aAX + bAY = a\lambda X + b\lambda Y = \lambda(aX + bY).$$

Alors $aX + bY \in E_\lambda(A)$.

Dimension d'un sous-espace propre

Exemple

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, alors $E_5(A) = \{y\, X_1,\ y \in \mathbb{R}\}$, en posant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On dit que le sous-espace vectoriel $E_5(A)$ est **engendré** par la famille composé du seul vecteur X_1. On note :

$$E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\{X_1\}\right).$$

La famille $\{X_1\}$ est composée d'un seul vecteur (non nul).
On dit que cette famille (composé que d'un vecteur) est **libre**.
On dit aussi que $\{X_1\}$ est une base de $E_5(A)$. Alors la dimension de $E_5(A)$, qui est le nombre d'éléments de cette base, est finalement 1.

Exemple

Considérons ici $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ et explicitons $E_{-2}(A)$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et supposons que $X \in E_{-2}(A)$. Alors :

$$AX = -2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y - 5z & = & -2x \\ -5x - 7y + 5z & = & -2y \\ -5x - 5y + 3z & = & -2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 5y - 5z & = & 0 \\ -5x - 5y + 5z & = & 0 \\ -5x - 5y + 5z & = & 0 \end{array} \right. .$$

On remarque que le système précédent n'a qu'une équation indépendante : $-x - y + z = 0$.
Donc : $z = x + y$. On en déduit les vecteurs de $E_{-2}(A)$.

1/2

$$E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ou encore $E_{-2}(A) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R} \right\}.$

Ou encore : $E_{-2}(A) = \left\{ x\,X_1 + y\,X_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, en posant

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On dit que le sous-espace vectoriel $E_{-2}(A)$ est engendré par la famille composée des vecteurs X_1 et X_2.

On note : $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\,(\{X_1, X_2\})$. La famille $\{X_1, X_2\}$ est composée de deux vecteurs non colinéaires (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de réel a tel que $X_1 = aX_2$ ou $X_2 = aX_1$). $\{X_1, X_2\}$ est une base de $E_{-2}(A)$. Et la dimension de $E_{-2}(A)$, qui est le nombre d'éléments de cette base, est 2.

Exercice 2

Pour $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, expliciter les sous-espaces propres $E_1(A)$ et $E_2(A)$ et montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de dimension 1.

Plan

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle **polynôme caractéristique** de la matrice A le polynôme

$$\chi_A(t) = \det(tI_n - A),$$

où I_n est la matrice identité carrée d'ordre n et $t \in \mathbb{R}$.
Ainsi si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ alors :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & t - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & t - a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que χ_A est un polynôme unitaire de degré n, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme développée $t^n + P_{n-1}(t)$, où P_{n-1} est un polynôme de degré au plus $n-1$.

Exemple

Posons encore $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et déterminons son polynôme caractéristique $\chi_A(t)$. On a :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix}.$$

Pour développer, comme il s'agit ici d'un déterminant d'ordre 3, on peut appliquer la *règle de Pierre Sarrus* mais on va privilégier des opérations élémentaires. En effet, l'idée est d'obtenir une forme factorisée de $\chi_A(t)$. On verra plus loin l'utilité d'obtenir cette forme. Si l'on note L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de notre déterminant, faisons l'opération élémentaire :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3.$$

1/2

On a alors , en mettant ensuite $t-5$ en facteur dans toute la nouvelle ligne L_1,

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & t-5 & t-5 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix}.$$

Puis, on fait les opérations élémentaires :
$L_2 \leftarrow L_2 + L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.
On a : $\chi_A(t) = (t-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix}$.
Or, on sait qu'un déterminant triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. Donc : $\chi_A(t) = (t-5)(t-2)^2$.
On peut l'écrire aussi : $\chi_A(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 20$.
La forme factorisée de $\chi_A(t)$ permet de dire que 5 est une racine simple, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité 1 et 2 est une racine double, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité 2.

2/2

Propriétés

Les valeurs propres (qui sont toujours réelles) d'une matrice carrée sont exactement les racines réelles de son polynôme caractéristique. Cela signifie que le spectre de A est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique.

⚠ Attention, cela signifie qu'une matrice carrée peut trés bien ne pas avoir de valeur propre (c'est-à-dire que son spectre est $\emptyset$).
Ainsi pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\chi_A(t) = t^2 + 1$, comme $t^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle, on peut affirmer que A n'a pas de valeur propre (réelle).

On remarque aussi que le nombre de valeurs propres réelles distinctes <u>ne peut pas</u> être supérieur à l'ordre de la matrice carrée car si par exemple $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n et a au plus n racines réelles.

Exercice 3

En utilisant le polynôme caractéristique associé, déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Préciser les sous-espaces propres et leurs dimensions respectives.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que λ soit une racine réelle de son polynôme caractéristique d'ordre de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^\star$ alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant \alpha,$$

$E_\lambda(A)$ désignant le sous-espace propre associé à λ.

Écrire que λ est une racine réelle du polynôme caractéristique de A d'ordre de multiplicité α peut se formuler en écrivant que λ est une valeur propre d'ordre α de A.

Exemple

Supposons $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec $\chi_A(t) = (t-2)(t+1)^3$. Alors les valeurs propres de A sont -1 et 2. Par ailleurs, si l'on note $E_{-1}(A)$ (resp. $E_2(A)$) le sous-espace propre associé à -1 (resp. 2) alors comme -1 est une racine de multiplicité 3 de χ_A et 2 est une racine de multiplicité 1 de χ_A,

$$1 \leqslant \dim E_{-1}(A) \leqslant 3 \text{ et } 1 \leqslant \dim E_2(A) \leqslant 1.$$

Cela signifie que $\dim E_{-1}(A)$ peut prendre pour valeur 1, 2 ou 3 et c'est la détermination d'une base de $E_{-1}(A)$ qui permet de choisir entre ces trois valeurs. Par contre, $\dim E_2(A) = 1$ obligatoirement.

On peut donc remarquer que si λ est une valeur propre simple de A alors $\dim E_\lambda(A) = 1$.

Plan

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est **diagonalisable dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice **inversible** $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$P^{-1}AP$$

soit une matrice diagonale. On dit que P est la **matrice de passage** associée à cette diagonalisation.

Dans la pratique, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit plus simplement que A est diagonalisable car le fait que l'on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est sous-entendu.
Attention, toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas diagonalisables comme nous le verrons dans les exemples et les exercices.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est **diagonalisable** si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est n. Dans ce cas, les colonnes de la matrice P sont les **vecteurs propres** de A et les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les **valeurs propres** de A.

On peut formuler aussi la proposition précédente sous la forme suivante, que l'on suivra dans les exercices.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est **diagonalisable** si et seulement si l'on a à la fois les points suivants.

- Son polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ est **scindé** dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il possède n racines réelles (distinctes ou non).
- **Pour toute racine** λ de $\chi_A(t)$, la dimension de son sous-espace propre associé $\dim E_\lambda(A)$ est **exactement son ordre de multiplicité** dans la décomposition en facteurs de $\chi_A(t)$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
Dans l'affirmative, diagonaliser A.

- On a calculé plus haut son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(t) = (t-5)(t-2)^2.$$

$\chi_A(t)$ est donc scindé et la forme factorisée de $\chi_A(t)$ permet de dire que 5 est une racine simple, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité 1 et 2 est une racine double, c'est-à-dire d'ordre de multiplicité 2. Ainsi, on peut déjà écrire que :

$$1 \leqslant \dim E_2(A) \leqslant 2 \text{ et } \dim E_5(A) = 1.$$

Nous devons préciser $\dim E_2(A)$. Pour cela, il nous faut trouver une base de $E_2(A)$.

1/4

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et supposons que $X \in E_2(A)$. Alors :

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y + z & = & 2x \\ x + 3y + z & = & 2y \\ x + y + 3z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right. .$$

On remarque que le système précédent n'a qu'une équation indépendante : $x + y + z = 0$.
Donc : $z = -x - y$. Précisons les vecteurs de $E_2(A)$.
On a : $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Cela s'écrit : $E_2(A) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Soit encore : $E_2(A) = \left\{ x\, X_2 + y\, X_3,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, en posant

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On dit que le sous-espace vectoriel $E_2(A)$ est engendré par la famille composée des vecteurs X_2 et X_3, qui est libre.

$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\{X_2,\, X_3\}\right)$.

La famille $\{X_2,\, X_3\}$ est une base de $E_2(A)$. Et la dimension de $E_2(A)$, qui est le nombre d'éléments de cette base, est 2.

Ainsi, pour toute racine λ de $\chi_A(t)$, la dimension de son sous-espace propre associé $\dim E_\lambda(A)$ est exactement son ordre de multiplicité dans la décomposition en facteurs de $\chi_A(t)$.

On peut conclure : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Il reste à diagonaliser A, ce qui signifie déterminer une matrice P de passage et la matrice diagonale $P^{-1}AP$, que l'on notera D.

Partons de $E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\{X_1\}\right)$, où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de

$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\{X_2,\, X_3\}\right)$.
On va construire P de la façon suivante : ses colonnes C_i sont les composantes des vecteurs X_i pour tout $i = 1, 2, 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a la relation : $D = P^{-1}AP$. On remarque que dans D le premier coefficient de la diagonale est 5 car on a commencé par X_1, vecteur de $E_5(A)$ pour écrire P.

Remarque : dans l'exemple précédant, on aurait pu écrire P en commençant par les vecteurs de $E_2(A)$. Dans ce cas, on écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a toujours la relation : $D = P^{-1}AP$.
De même, rien n'interdit de prendre par exemple $2X_1$ à la place de X_1, $\{2X_1\}$ est toujours une base de $E_5(A)$ car ce vecteur étant non nul, est libre et $\mathrm{Vect}\ (\{2X_1\}) = \mathrm{Vect}\ (\{X_1\})$.

On écrit : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a toujours la relation : $D = P^{-1}AP$.
En conclusion, il n'y a pas unicité du choix de P et de D, il faut respecter seulement que l'ordre dans lequel on prend les valeurs propres de A pour écrire la diagonale de D doit être le même pour écrire les vecteurs colonnes de P, c'est-à-dire les vecteurs des bases des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{Tr}\,(A)$ la somme des coefficients de la diagonale principale de A.
Pour toute matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\,(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}\,(A)$.
Par voie de conséquence, si le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A est scindé, la somme de ses valeurs propres (répétées jusqu'à leur ordre de multiplicité) est exactement $\mathrm{Tr}\,(A)$.

Ce résultat permet de vérifier la cohérence des calculs.

Exemple

Reprenons encore l'exemple précédent avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Sa trace est : $\mathrm{Tr}\,(A) = 3 + 3 + 3 = 9$.
Par ailleurs le spectre de A est : $\mathrm{Sp}\,(A) = \{2, 2, 5\}$.
On a répété 2 car c'est une valeur propre double et on a bien :
$\mathrm{Tr}\,(A) = 9 = 2 + 2 + 5$.

Exercice 4

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
Si oui, la diagonaliser.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. Montrer qu'il possède une racine triple que l'on déterminera. On note λ_1 cette valeur propre.
2. Déterminer une base du sous-espace propre $E_{\lambda_1}(A)$ ainsi que sa dimension. Conclusion ?
3. Par quel moyen on aurait pu conclure quant à la non diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en utilisant simplement le résultat de la première question ?

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ -15 & -9 & -5 & -12 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. L'écrire sous forme factorisée.
2. Déterminer les dimensions des sous-espaces propres. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Plan

Propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres distinctes de A alors, on rappelle que pour tout λ_i racine simple de $\chi_A(t)$, $\dim E_{\lambda_i}(A) = 1$ et donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(A) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

A est bien diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sans expliciter les sous-espaces propres.

Propriétés

Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que la transposée de A est ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$.

Donc A est symétrique. On retrouve le fait qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Plan

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$P^{-1}AP$$

soit une matrice triangulaire supérieure. On dit que P est la **matrice de passage** associée à cette trigonalisation.

Comment procéder pour trigonaliser ? On commence comme pour une diagonalisation, c'est-à-dire que l'on cherche le polynôme caractéristique de la matrice A de l'énoncé puis on cherche le spectre de A avec l'ordre de multiplicité des racines. Puis, on détermine des bases de chacun des sous-espaces propres associés. C'est à ce moment que l'on va diverger de la diagonalisation. En effet, on va supposer que la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est plus n (car sinon A serait diagonalisable et il n'y aurait plus rien à faire car une matrice diagonale est une matrice triangulaire particulière). L'idée est de construire P de la façon suivante. Supposons que la somme des dimensions des sous-espaces propres est $p < n$. Les colonnes $C_1, ..., C_p$ de P sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres. Il faut compléter par $C_{p+1}, ..., C_n$ fournis en général par l'énoncé. Alors :

$$T = P^{-1}AP,$$

où T est une matrice triangulaire supérieure ayant sur sa diagonale principale seulement les valeurs propres de A répétées selon leur ordre de multiplicité. Précisons maintenant T.

En général, il nous manque à ce niveau les coefficients de T qui sont au dessus strictement de la diagonale principale. Il y a alors deux pistes : soit on calcule P^{-1} et on fait le produit $P^{-1}AP$ ce qui est un peu long, soit on nomme par des lettres les coefficients inconnus puis on utilise :

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow PT = AP.$$

On aboutit à un système linéaire qui permet le calcul des coefficients inconnus de T.
C'est ce que nous allons faire dans l'exemple qui va suivre.

Remarque : on peut aussi faire un processus similaire pour aboutir à une matrice triangulaire inférieure mais nous nous limiterons ici aux matrices triangulaires supérieures.

Exemple

Trigonalisons $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On commence comme pour une diagonalisation. On commence par calculer (les calculs intermédiaires sont laissés au lecteur) :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 4 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)(t-1)^2.$$

Donc 3 est racine simple et 1 est racine double.
Puis, on détermine une base du sous-espace propre $E_3(A)$ en résolvant le système : $AX = 3X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On trouve : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\,(\{X_1\})$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, on détermine une base du sous-espace propre $E_1(A)$ en résolvant le système : $AX = X$.

On trouve : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\,(\{X_2\})$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

À ce niveau, on peut conclure que A <u>n'est pas diagonalisable</u> car :

$$\dim E_3(A) + \dim E_1(A) = 1 + 1 = 2 \neq 3.$$

Prenons maintenant $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(On a choisi une matrice colonne simple exprès pour que les calculs ne soient pas compliqués.)

On pose alors : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les colonnes de P sont dans l'ordre X_1, X_2, X_3. Il faut vérifier que P est inversible. On calcule rapidement $\det P = -1 \neq 0$.

Attention, si l'on avait trouvé que P n'était pas inversible, il aurait alors fallu choisir un autre vecteur X_3.

La matrice $T = P^{-1}AP$ cherchée est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de T correspondent à la partie diagonalisable car les deux premiers vecteurs de P sont X_1 et X_2, vecteurs propres associés respectivement à 3 et à 1.

Puis, on écrit :

$$PT = AP \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} b+1 & = & 2 \\ b & = & 1 \\ a+b & = & -4 \end{array} \right. \Rightarrow b = 1 \text{ et } a = -5.$$

Finalement :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : il faut être conscient qu'encore une fois, comme pour la diagonalisation, il n'y a pas du tout unicité du couple (P, T). Seul l'énoncé peut imposer un choix de P et donc de T.

Exercice 8

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il possède une racine triple λ_1 que l'on déterminera.
2. Déterminer la dimension du sous-espace propre $E_{\lambda_1}(A)$.

   Montrer que $\{X_1, X_2\}$, où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_{\lambda_1}(A)$. A est-elle diagonalisable ?
3. On pose $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice P, dont les colonnes sont dans cet ordre X_1, X_2, X_3 est inversible.
4. On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

   Déterminer a et b, à partir de la relation : $PT = AP$.

Plan

Plan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et p un entier naturel non nul.
On rappelle que l'on a :

$$A^0 = I_n \text{ et } A^1 = A.$$

Et la **puissance** $p^{\text{ème}}$ de A, notée A^p, est le produit de A par elle même $p-1$ fois (c'est-à-dire A apparaît p fois dans le produit).
En particulier,

$$(I_n)^p = I_n$$

pour tout p.
Remarque : on peut étendre au cas où p est un entier relatif si A est inversible. Dans ce cas, si p est un entier négatif non nul,

$$A^p = \left(A^{-1}\right)^{-p}.$$

Quelles sont les méthodes pour calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$?

- Une première piste est le calcul des premières puissances de A puis de conjecturer l'expression de A^p en fonction de p et enfin démontrer cette formule par récurrence. Voir un exemple plus loin.
- Une deuxième piste est l'utilisation de la formule du binôme de Newton, on peut procéder de la façon suivante :
  1. décomposer A sous forme $A = D + N$, où D est diagonale et N ayant des puissances simples (par exemple nilpotente) ;
     (une telle décomposition est à votre niveau souvent fournie par l'énoncé.)
  2. vérifier que D et N commutent ;
  3. appliquer la formule du binôme de Newton rappelée dans un exemple plus loin.
- Une troisième piste est d'utiliser une égalité du type $P(A) = 0$, où P est un polynôme. Par exemple, si l'on a A^2 en fonction de A et de I_n, en multipliant par A, on a alors une relation entre A^3, A^2 et A donc on a A^3 en fonction de A et de I_3 et ainsi de suite, on peut trouver A^p en fonction de A et de I_n.

- Une quatrième piste est de diagonaliser (ou à défaut de trigonaliser) la matrice A.
  On détermine alors R matrice diagonale ou triangulaire supérieure telle que :
  $$R = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = P.R.P^{-1}.$$
  On établit alors (par récurrence) la formule :
  $$\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = P.R^p.P^{-1}.$$
  On rappelle au passage que si R est diagonale (on écrit la matrice carrée d'ordre n, R plus explicitement $R = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$) alors on a l'égalité :
  $$\forall p \in \mathbb{N}^\star,\ (\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))^p = \mathrm{Diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p).$$
  On va illustrer à l'aide d'exemples et d'exercices.

Plan

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminons A^p pour tout entier p.

Appliquons la première piste. On calcule rapidement :

$$A^0 = I_3,\ A^1 = A,\ A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \\ 3^2 & 3^2 & 3^2 \end{pmatrix}.$$

On va montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$,
$A^p = \begin{pmatrix} 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \end{pmatrix}$. Notons $\mathcal{P}(p)$ cette proposition.

1/2

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$ est vraie ($\mathcal{P}(2)$ aussi mais c'est inutile à dire pour le raisonnement).

Héredité : supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un entier $p \geqslant 1$. Alors :

$$A^{p+1} = A \times A^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^p & 3^p & 3^p \\ 3^p & 3^p & 3^p \\ 3^p & 3^p & 3^p \end{pmatrix}.$$

Donc, $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. On a montré le résultat.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons A^p pour tout entier p en utilisant la méthode du binôme de Newton, c'est-à-dire la deuxième piste.

On remarque que $A = J + I_3$, où J est la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or, $A^p = (J + I_3)^p$ et on peut appliquer la formule du binôme de Newton car les matrices J et I_3 commutent :

$$J \times I_3 = I_3 \times J = J.$$

On a : $A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} J^k I_3^{p-k}$, où : $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

1/3

Or, J est la matrice A de l'exemple précédent et on sait que :

$$\forall k \geqslant 1,\ J^k = 3^{k-1} J \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ I_3^{p-k} = I_3.$$

Donc, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$J^k \times I_3^{p-k} = J^k = 3^{k-1} J.$$

Et de même, pour $k = 0$:

$$J^k \times I_3^{p-k} = J^0 \times I_3^p = I_3 \times I_3 = I_3.$$

De plus, $\binom{p}{0} = 1$.

Il reste : $A^p = \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^{k-1}\right) J + \binom{p}{0} I_3 = \frac{1}{3}\left[4^p - 1\right] J + I_3$ car :

$$\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^k 1^{p-k}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 3^k 1^{p-k} - 1\right) = \frac{1}{3}\left[4^p - 1\right],$$

en réappliquant la formule du binôme de Newton.
On conclut, en remplaçant J et I_3 par leur expression matricielle que :
$A^p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^p+2 & 4^p-1 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p+2 & 4^p-1 \\ 4^p-1 & 4^p-1 & 4^p+2 \end{pmatrix}$.

3/3

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; On veut calculer A^p par deux méthodes.

1. Calculer A^2 puis A^3. En déduire la forme de A^p pour tout entier p non nul.
   Prouver alors ce résultat par récurrence.
2. On remarque que $A = J + I_2$, où J est à expliciter.
   Calculer J^k pour tout entier k.
3. Après avoir remarqué que $J \times I_2 = I_2 \times J$, développer $A^p = (J + I_2)^p$ avec la formule du binôme de Newton et retrouver la forme de A^p trouvée à la question 1.

Plan

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Le but est de calculer A^p, où $p \in \mathbb{N}$ en diagonalisant A.
On commence par calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$.

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ 2 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5).$$

Donc A a deux valeurs propres simples et distinctes et comme $n = 2$, A est diagonalisable. On cherche maintenant une matrice de passage P convenable. Pour cela, on cherche des bases (composées que d'un vecteur ici) des deux sous-espaces propres de A.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 4y & = & -x \\ -2x + y & = & -y \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 4y & = & 0 \\ -2x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$.

Il reste $x = y$ et donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$.

$X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_5(A) \Leftrightarrow AX = 5X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x-4y &=& 5x\\ -2x+y &=& 5y\end{array}\right.$
$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x-4y &=& 0\\ -2x-4y &=& 0\end{array}\right.$.

Il reste $x = -2y$ et donc $E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$. Donc :

$$P = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } A = PDP^{-1}.$$

Puis on montre rapidement par récurrence (le faire) que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = PD^pP^{-1}.$$

Puis, on voit rapidement que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N},\ D^p = \begin{pmatrix} 5^p & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix}.$$

Il reste à faire les produits :

$$A^p = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^p & 0 \\ 0 & (-1)^p \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $1/3$ peut se mettre devant le produit des trois matrices et on rappelle que pour faire un produit du type ABC, on peut utiliser $ABC = (AB)C$ ou $ABC = A(BC)$.
On trouve alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, :

$$A^p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \times 5^p + (-1)^p & -2 \times 5^p + 2 \times (-1)^p \\ -5^p + (-1)^p & 5^p + 2 \times (-1)^p \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer qu'il y a trois racines distinctes λ_1, λ_2, λ_3.
   On prendra $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
2. Justifier le fait que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sans calcul de P.
   Déterminer une matrice de passage P telle que $D = P^{-1}AP$, en prenant $D = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$.
3. Déterminer P^{-1} et D^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Plan

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit qu'elle vérifie une **récurrence linéaire** si et seulement si elle vérifie une relation du type :

$$(1)\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{k-1} u_{n+k-1},$$

où k est un entier non nul et $a_0, \ldots, a_{k-1}$ sont k réels fixés.
La donnée de u_0, $u_1, \ldots, u_{k-1}$ permet alors de définir une seule suite solution de (1).

Exemple

Un exemple classique est la suite de Fibonacci (dit Leonhard de Pise). C'est l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

avec $u_0 = u_1 = 1$.

Revenons au cas général. On veut ici déterminer l'expression de u_n en fonction de n, à partir de l'expression (1).
L'idée est de remarquer que (1) est équivalente à une relation matricielle du type :

$$U_{n+1} = AU_n,$$

où U_n est une matrice de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. L'exemple et l'exercice qui suivent vous aident à voir comment choisir U_n et A.
Puis, quand on posé convenablement U_n et trouvé la matrice A, on remarque (faire une récurrence) que l'on a :

$$U_n = A^n U_0,$$

où U_0 contient les conditions initiales.
Il reste à diagonaliser A pour calculer A^n et on en déduit U_n et donc u_n. Traitons un exemple pour bien comprendre.

Exemple

Nous allons déterminer l'expression de u_n en fonction de n lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci. Pour cela, on va remplacer la relation de récurrence qu'elle vérifie par une relation matricielle.

En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, alors la relation de récurrence devient :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} & = & u_{n+1} \end{array} \right. \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va diagonaliser A. Rapidement, $\chi_A(t) = t^2 - t - 1$, donc A a pour valeurs propres : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme les deux valeurs propres sont réelles et distinctes et comme $1+1=2$, A est diagonalisable.

On écrit donc : $A = P.\mathrm{Diag}\,(\alpha, \beta).P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

1/3

En effet, $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à α.
On écrit :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Or, $\alpha^2 = \alpha + 1$ et donc : $A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha. \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.
De même, on montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre β.
De plus, une formule classique donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.\mathrm{Diag}(\alpha^n, \beta^n).P^{-1}$.
Il reste à courageusement faire le calcul.
On obtient : $A^n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n & \alpha^n - \beta^n \\ -\alpha\beta\left(\alpha^n - \beta^n\right) & \alpha^{1+n} - \beta^{1+n} \end{pmatrix}$.
Et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n = AU_{n-1}$, on a :

$$U_n = A \times A \times ... \times AU_0 = A^n U_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc : $U_n = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -\alpha^n(-1+\beta) + (\alpha-1)\beta^n \\ -\alpha^{1+n}(-1+\beta) + (\alpha-1)\beta^{1+n} \end{pmatrix}$.
Le terme u_n cherché est le coefficient du haut de U_n.
Comme $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, et que $\alpha + \beta = 1$, on a $-1 + \beta = -\alpha$ et $\alpha - 1 = -\beta$, et on trouve finalement : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$.

Exercice 11

Le but de l'exercice est de donner l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 0$ et :

(1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (1) est équivalente à $U_{n+1} = AU_n$.
2. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On appelera P la matrice de passage et D une matrice diagonale telle que $D = P^{-1}AP$.
   Donner l'expression de D^n puis de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$. En déduire alors u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de l'entier n.
4. On pose $V_n = P^{-1}U_n$. Vérifier que $U_n = PV_n$.
   Puis montrer que $U_n = A^n U_0 \Leftrightarrow V_n = D^n V_0$.
   Calculer V_0 puis V_n et retrouver l'expression de U_n écrite à la question précédente.

Plan

Traitons le cas général pour trois suites (le lecteur adaptera pour deux suites ou plus de trois suites).
Considérons donc trois suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée des quantités u_0, v_0, w_0 et la récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & a_1 u_n + a_2 v_n + a_3 w_n \\ v_{n+1} & = & b_1 u_n + b_2 v_n + b_3 w_n \\ w_{n+1} & = & c_1 u_n + c_2 v_n + c_3 w_n \end{array} \right. .$$

Si l'on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = AX_n.$$

Par récurrence, montrons que $X_n = A^n X_0$.

<u>Initialisation</u> : le résultat est vrai pour $n = 0$.
<u>Hérédité</u> : puis supposons le résultat vrai pour un entier n. Alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0.$$

On a le résultat. Maintenant, on suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On appelle P sa matrice de passage et D la matrice diagonale associée.
Posons maintenant $Y_n = P^{-1} X_n$, et donc $X_n = PY_n$. Alors :

$$X_n = A^n X_0 \Leftrightarrow P^{-1} X_n = P^{-1} A^n X_0$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} X_n = P^{-1} A^n P Y_0 \Leftrightarrow Y_n = D^n Y_0.$$

L'idée est de calculer Y_0 en résolvant le système $PY_0 = X_0$.
(L'inversion complète de P n'est pas utile.)
Puis, on en déduit Y_n par la formule $Y_n = D^n Y_0$.
Enfin, X_n s'obtient par : $X_n = PY_n$. On en déduit u_n, v_n et w_n.

<u>Remarque</u> : à partir de $X_n = A^n X_0$, on peut aussi écrire : $\overline{X_n = P^{-1}} D^n P X_0$, mais on est alors obligé de calculer P^{-1} puis de faire le produit de trois matrices, c'est long.

Exercice 12

Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array}\right. .$$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On notera P sa matrice de passage et D la matrice diagonale associée.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = DY_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = D^n Y_0$.
5. En déduire $X_n = PY_n$ en fonction de n puis les expressions des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n.