Calcul matriciel

12SCI02

V. Bahier, A. Boudiaf, K. Chaib, W. Damin

2019-2020

INP TOULOUSE
PURPAN
ÉCOLE D'INGÉNIEURS
Sciences du vivant | Agriculture
Agroalimentaire | Marketing | Management

Plan

Plan

Matrice = tableau de nombres

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Définition

On appelle **matrice réelle à n lignes et p colonnes** tout tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.
L'ensemble de telles matrices se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En désignant par $a_{i,j}$ le coefficient situé à la ligne i et colonne j de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors A s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

ou de manière condensée $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et on peut écrire $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ où $a_{1,1} = 3,\ a_{2,1} = 0,\ a_{1,2} = -1,\ a_{2,2} = 1,\ a_{1,3} = \frac{1}{2},\ a_{2,3} = 5.$

Exercice 1

Expliciter la matrice $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par la formule $a_{i,j} = i + 4j - 4.$

Matrices particulières

- **Matrice nulle** : $O_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
- **Matrices lignes** (lorsque $n = 1$) : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \end{pmatrix}$.
- **Matrices colonnes** (lorsque $p = 1$) : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,p} \end{pmatrix}$, appelées aussi **vecteurs**.

Matrices carrées particulières

Lorsque $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se note de manière allégée $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Matrice identité** : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Matrices diagonales** : $A = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$.
- **Matrices triangulaires supérieures** :

  $A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$, où chaque symbole $*$ représente un nombre réel quelconque.

Quelques exemples

Exemples

- Les matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales (donc en particulier triangulaires supérieures).
- Les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 3\pi \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures (mais pas diagonales car il y a au moins une valeur non nulle en dehors de la diagonale).
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas triangulaire supérieure.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par la formule

$$a_{i,j} = \cos((i+j)\frac{\pi}{2}).$$

1) Écrire A lorsque $n = 2$. A est-elle diagonale ? triangulaire supérieure ?

2) Montrer que A n'est pas triangulaire dès que $n \geq 3$.

Plan

Plan

Définition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La **somme** de A et B, notée $A + B$, est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -\sqrt{2} & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1+\pi & 3 \\ \ln(3) & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Alors
$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4+\pi & 0 \\ -\sqrt{2}+\ln(3) & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriétés

L'addition définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est commutative ($A + B = B + A$), associative ($(A + B) + C = A + (B + C)$), et admet un élément neutre qui est $O_{n,p}$ ($A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$).

⚠ On ne peut additionner deux matrices que si elles ont même taille, c'est-à-dire seulement si leurs nombres de lignes sont égaux et leurs nombres de colonnes aussi.

Plan

Définition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le **produit** de A par λ, noté λA, est la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Alors $\lambda A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 3 & -\frac{2}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Propriétés

La multiplication par un réel définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est distributive par rapport à l'addition des réels ($(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$) et aussi par rapport à l'addition des matrices ($\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$).

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $3A + 2(B - 2A)$.

Plan

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Le **produit** de A par B, noté AB est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$

⚠ Pour que le produit AB ait un sens il est donc nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Propriétés

Sous réserve que le produit entre les matrices soit bien défini, celui-ci est associatif ($A(BC) = (AB)C$), distributif à gauche et à droite sur l'addition de matrices ($A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$), et admet un élément neutre qui est la matrice identité ($AI_q = I_nA = A$).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2\times1+1\times5 & 2\times0+1\times(-1) & 2\times3+1\times2 & 2\times1+1\times(-2) \\ -1\times1+3\times5 & -1\times0+3\times(-1) & -1\times3+3\times2 & -1\times1+3\times(-2) \\ 4\times1+1\times5 & 4\times0+1\times(-1) & 4\times3+1\times2 & 4\times1+1\times(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -1 & 8 & 0 \\ 14 & -3 & 3 & -7 \\ 9 & -1 & 14 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer le produit de $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 & \frac{3}{4} \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \geq 2$. La **puissance** k-ème de A, notée A^k, est le produit de A par elle même $k-1$ fois (c'est-à-dire A apparaît k fois dans le produit).

⚠ Rappelons que le produit de deux matrices n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrice de droite. Cela implique que lorsqu'il s'agit de la même matrice, celle-ci doit être carrée. La puissance de matrices n'est donc définie que pour des matrices carrées.

<u>Convention</u> : $A^0 = I_n$ et $A^1 = A$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Les puissances 0-ème, 1-ère et 2-ème de A sont

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer A^2, A^3 et A^4.

Exercice 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer AB puis BA. Que remarque t-on ?

L'exercice ci-dessus fournit donc un contre-exemple vis-à-vis de la non commutativité du produit matriciel : pour toutes matrices A et B telles que les produits AB et BA aient un sens, on a $AB \neq BA$ en général.

Exercice 7

Trouver toutes les matrices B qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Plan

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés

La transposée est linéaire (${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB$), involutive (${}^t({}^tA) = A$), et est un antimorphisme (${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$).

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite

- **symétrique** si ${}^tA = A$
- **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer que si A est antisymétrique alors ses coefficients diagonaux sont nuls.
2) Montrer que si A est à la fois symétrique et antisymétrique alors A est la matrice nulle.

Plan

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas on dit que B est l'**inverse** de A et on note $B = A^{-1}$.

Cette notion d'inversibilité pour les matrices est très analogue à celle pour les réels : $x \in \mathbb{R}$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $xy = 1$. La différence majeure est que le produit de réels commute tandis que celui des matrices non (comme on l'a vu précédemment, $AB \neq BA$ en général).

⚠ L'inversion de matrices n'a de sens que pour des matrices carrées.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie que $AB = BA = I_2$, donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

Reprendre la même méthode pour déterminer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Propriétés

L'inversion de matrice est une involution ($(A^{-1})^{-1} = A$) et un anti-morphisme ($(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$) sur l'ensemble des matrices inversibles.

⚠ Contrairement à la transposition, l'inversion de matrice N'EST PAS linéaire : si cela a du sens, $(A + \lambda B)^{-1} \neq A^{-1} + \lambda B^{-1}$ en général, même quand $\lambda = 1$.

Une méthode d'inversion

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour inverser des matrices. Présentons-en une reposant sur l'algorithme de *Gauss-Jordan*. Nous en verrons une autre à la fin de la section suivante.

Principe de la méthode : On souhaite inverser la matrice A. Disposons A à gauche, et la matrice identité I_n à droite de manière concaténée comme ceci :

$$C = (A \mid I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$$

En effectuant successivement des ***opérations élémentaires*** sur les lignes de C on cherche à faire apparaître la matrice I_n à gauche, ce qui donne une certaine matrice B à droite :

$$(I_n \mid B) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$$

Alors $B = A^{-1}$.

Les **opérations élémentaires** sur les lignes que l'on est autorisé à faire sont de trois sortes :

- Transvection : On peut ajouter à la ligne i un multiple réel d'une ligne j (pour $j \neq i$), ce qui se note

$$L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$$

  où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Dilatation : On peut multiplier par un réel non nul la ligne i, ce qui se note

$$L_i \longleftarrow \beta L_i$$

  où $\beta \neq 0$.

- Transposition : On peut échanger la ligne i avec la ligne j, ce qui se note

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

La méthode de Gauss-Jordan permet d'utiliser astucieusement ces opérations élémentaires en trois phases :

- Phase 1 : On transforme la matrice de gauche A en une matrice triangulaire supérieure.
- Phase 2 : On transforme cette nouvelle matrice en une matrice diagonale.
- Phase 3 : On transforme cette dernière en la matrice identité I_n.

La phase 1 consiste donc à faire apparaître des zéros en-dessous de la diagonale, la phase 2 d'en faire apparaître au-dessus de la diagonale, et la phase 3 de faire les dilatations nécessaires sur chaque ligne de manière à obtenir la matrice identité.

Plutôt que de détailler abstraitement les étapes de la méthode pour chacune de ces phases, voyons-les directement sur un exemple.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$. Pour commencer on dispose I_3 à droite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On choisit un premier bon "pivot", c'est-à-dire dans la première colonne on prend un coefficient non nul proche de 1. Ici on a un 1 en troisième position. On fait $L_1 \longleftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On élimine tous les coefficients de la première colonne sous ce pivot. Pour cela on fait $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$. Pour L_3 on n'a rien à faire vu qu'on a déjà un 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -18 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pour la première colonne c'est plié, on attaque la deuxième. Si on arrive à faire apparaître un 0 à la ligne 3 de cette deuxième colonne sans toucher aux deux 0 déjà obtenus dans la première colonne, alors cela termine la phase 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -18 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Afin justement d'être sûr de ne pas retoucher aux deux zéros déjà obtenus, on manipule seulement les lignes 2 et 3. Comme pivot on a le choix entre -11 et 3, on prend 3 car c'est un nombre plus proche de 1. On fait donc $L_2 \longleftrightarrow L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -18 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

On fait $L_3 \longleftarrow 3L_3 + 11L_2$. (Remarquez que cette opération n'est pas une opération élémentaire mais elle revient au même que de faire la dilatation $L_3 \longleftarrow 3L_3$ puis la transvection $L_3 \longleftarrow L_3 + 11L_2$ donc c'est autorisé). Au lieu de cette étape on aurait aussi pu faire $L_3 \longleftarrow L_3 + \dfrac{3}{11}L_2$ mais alors on aurait eu des fractions jusqu'à la fin, ce qu'on cherche à éviter.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

La phase 1 est terminée. Passons à la phase 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Dans cette phase 2, on va aussi faire apparaître des zéros colonne par colonne, sauf qu'au lieu de partir de la gauche on va partir de la droite. On commence donc par éliminer le -10 et le 5. Pour cela on se sert de la dernière ligne. On fait $L_1 \longleftarrow L_1 + 10L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 - 5L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & 0 & 110 & 30 & 61 \\ 0 & 3 & 0 & -54 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Il ne reste plus que le coefficient -6 à éliminer. On fait alors naturellement $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -54 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

La phase 2 est terminée. Allez c'est presque fini !

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -54 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

On lance la phase 3. On a plutôt de la chance ici car il y a déjà un 1 sur la ligne 1 et sur la ligne 3. On se résout donc juste à faire $L_2 \longleftarrow \frac{1}{3}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Terminé ! (puisque la matrice de gauche est I_3)

Du fait qu'on ait réussi à faire apparaître I_3 à gauche par des opérations élémentaires, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & -5 & -10 \\ 11 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Petite astuce supplémentaire : Si la matrice A à inverser possède des coefficients sous forme de fractions, on peut procéder en premier lieu à des dilatations de manière à se débarrasser de tous les dénominateurs (phase préliminaire que l'on pourrait appeler « phase 0 »).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. On dipose I_2 à droite de A et on applique les opérations élémentaires suivantes

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Phase 0 : on fait $L_1 \longleftarrow 2L_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Phase 1 : on choisit comme pivot -2 donc on fait $L_1 \longleftrightarrow L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

On élimine le coefficient sous le pivot en faisant $L_2 \longleftarrow 2L_2 + 5L_1$

1/2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

On obtient cette matrice et la phase 1 est terminée. Phase 2 : on élimine le coefficient -1 en haut à droite grâce à $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

Phase 3 : il ne nous reste plus qu'à faire $L_1 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_1$ et $L_2 \longleftarrow -L_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

Terminé !

On conclut que A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

À l'aide de la méthode de Gauss-Jordan présentée ci-dessus, déterminer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{4} \\ 3 & 4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La section suivante fournit une autre méthode pour déterminer si une matrice est inversible et en calculer son inverse le cas échéant.

Plan

Plan

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$.

Définition

Le **déterminant** de A, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$, est la quantité définie par :

- si $n = 2$: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$
- si $n \geq 3$: $\det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1})$ où $A_{i,j}$ désigne la matrice A à laquelle on a supprimé la ligne i et la colonne j.

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 3 \times (-4) + 2 \times 5 = -22.$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)^2 \times 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 7 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 + 10) - 7 \times (6 - 2) + 3 \times (5 - 0) \\ &= 20 - 28 + 15 = 7. \end{aligned}$$

Exercice 11

Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, et celui de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Plan

Propriétés

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. Échanger deux colonnes (ou deux lignes) de A a pour effet de multiplier le déterminant par (-1).
3. Multiplier une colonne (ou une ligne) de A par λ a pour effet de multiplier le déterminant par λ. En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Ajouter à une colonne (ou à une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes) ne modifie pas le déterminant.
5. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Conséquence 1 : Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors soustraire cette combinaison linéaire à cette colonne ne change pas le déterminant (par le point 4.) et fait apparaître une colonne de zéros. Cette opération revient donc au même que de multiplier cette colonne de A par $\lambda = 0$ et on en déduit $\det(A) = 0$ (par le point 3.).

Conséquence 2 : En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, le fait d'échanger la j-ème colonne C_j avec C_{j-1}, puis de l'échanger avec C_{j-2}, etc... jusqu'à C_1, (cela revient à avoir pris C_j et de l'avoir "glissée" en première position, ce qui n'est pas la même chose que d'avoir juste échangé C_j avec C_1, sauf si bien sûr $j = 1$ ou $j = 2$) fait au total $j - 1$ échanges. D'après le point 2. du résultat précédent, le déterminant est ainsi multiplié par $(-1)^{j-1}$. On en déduit la formule de **développement selon la colonne** j :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det(A_{k,j}).$$

Par ailleurs, comme les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$, le point 1. du résultat précédent permet d'obtenir la formule de **développement selon la ligne** i :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det(A_{i,k}).$$

En pratique, on choisit toujours de développer suivant la ligne ou la colonne ayant le plus de zéros. S'il y a peu de zéros au départ on peut éventuellement commencer par en faire apparaître grâce à des opérations élémentaires (points 2., 3., 4. du résultat précédent).

Exemple

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 21 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} 7 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 7 \times \left(0 + (-1)^{1+2} \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 0\right) \\
&= 7 \times (-2) \times (9 - 6) \\
&= -42
\end{aligned}$$

Exercice 12

Calculer $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$.

Exercice 13

Les nombres 119, 153, et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

est lui aussi divisible par 17.
Indication : ajouter à la dernière colonne un certain nombre de fois la première et un certain nombre de fois la deuxième.

Conséquence 3 : En développant successivement par rapport à la première colonne on peut montrer que le déterminant de toute matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire visuellement

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} &= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}. \end{aligned}$$

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 0 & 3 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 5 \times 3 \times (-2) = -30.$
- $\det(I_n) = 1 \times \cdots \times 1 = 1.$

Plan

Matrices

Opérations avec des matrices

- Addition de deux matrices
- Multiplication d'une matrice par un réel
- Multiplication de deux matrices
- Transposition d'une matrice
- Inversion d'une matrice

Déterminants

- Définition
- Propriétés
- Applications

Formule d'inversion d'une matrice

Définition

La **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, est la matrice B dont les coefficients sont

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

où on rappelle que $A_{i,j}$ désigne la matrice A à laquelle on a supprimé la ligne i et colonne j.

Théorème

A est inversible <u>ssi</u> $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{com}(A).$$

Remarque : Lorsque A est de taille 2, $A_{i,j}$ est alors de taille 1, et dans ce cas par convention on établit que le déterminant de $A_{i,j}$ vaut l'unique coefficient qu'elle contient.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 8 \neq 0$ donc A est inversible.

De plus, $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, donc ${}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour chaque matrice, dire si elle est inversible et si oui calculer son inverse.

Résolution de systèmes linéaires carrés

Supposons qu'on doive résoudre un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

en les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alors ce système est équivalent à

$AX = B$ où $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, alors en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $I_nX = A^{-1}B$, c'est-à-dire finalement $X = A^{-1}B$, ce qui fournit l'unique solution.

Exemple

Résoudre

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & & + & & 3z & = & 5 \\ & & 2y & - & 16z & = & -4 \end{cases}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En développant par exemple selon la 3ème ligne de A on a $\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc A est inversible. Le calcul de la comatrice donne $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 16 & 2 \\ 14 & -32 & -4 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ donc

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & \frac{3}{2} \\ 8 & -16 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 23 \\ -50 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

En utilisant la méthode matricielle présentée ci-dessus, résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Dans le cas où la matrice A associée au système linéaire n'est pas inversible, cette méthode ne s'applique pas. On utilise alors la méthode habituelle par pivot de Gauss.