Exercices
Intégration sur un segment et techniques de calculs d'intégrales

CESI École d'ingénieurs

Valentin Bahier

06/11/2019

Exercice 1

Soit $a > 0$ et soit $f : [-a, a] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases}.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique, où $T > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x \mathrm{d}x$ *(intégrer par parties)*
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{e^x + 1}}\mathrm{d}x$ *(changement de variable)*
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + 1}{(x + 1)^2}\mathrm{d}x$ *(commencer par décomposer en éléments simples)*

Exercice 4

En faisant apparaître des sommes de Riemann de fonctions bien choisies sur l'intervalle $[0,1]$*, déterminer les limites suivantes :*

1. $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(n-k).$$

Pour le prochain exercice on rappelle l'inégalité des accroissements finis :
Pour toute fonction $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$,

$$|g(t)-g(\alpha)|\leq|t-\alpha|\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|g'(x)|.$$

Exercice 5

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Pour tout* $n\geq 1$*, on considère la somme de Riemann de* f *selon la méthode des rectangles à gauche*

$$S_n(f):=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Notons $M:=\sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|$.

1. *Vérifier que*
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-S_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}}\left(f(t)-f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

2. *En déduire que*
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-S_n(f)\right|\leq\frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

3. *Application algorithmique : On considère* $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ *sur* $[a,b]=[0,1]$*. Donner un majorant de* M *(à la main). Écrire alors un algorithme donnant une valeur approchée de* $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ *à* ε *près.*

Exercice 6

Calculer une primitive de $f:x\mapsto\dfrac{1-x}{(x^2+x+1)^2}$ *et de* $g:x\mapsto\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$.