Correction des exercices Intégration sur un segment et techniques de calculs d'intégrales

CESI École d'ingénieurs

Valentin Bahier

06/11/2019

Exercice 1

Soit $a > 0$ et soit $f : [-a, a] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{si } f \text{ est paire} \end{cases}.$$

Par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

où, en appliquant le changement de variable $t = -x$ dans la première intégrale du membre de droite,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t) = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, si f est impaire, $f(-t) = -f(t)$ et on obtient

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

tandis que si f est paire, $f(-t) = f(t)$ et donc

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique, où $T > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^a + \int_a^{T+a} - \int_T^{T+a}\right) f(t)\mathrm{d}t.$$

Or par le changement de variables $x = t - T$,

$$\int_T^{T+a} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(x+T)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

puisque par périodicité de f on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout x. D'où le résultat.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln x \mathrm{d}x$ *(intégrer par parties)*
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x$ *(changement de variable)*
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ *(commencer par décomposer en éléments simples)*

1. En posant $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x^2 \end{cases}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2 \ln x \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{3}\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 \\
&= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.
\end{aligned}$$

2. En posant $t = \mathrm{e}^x$, on a $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1}} \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} (t+1)^{-1/2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{(t+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}+1} - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

3. On décompose en éléments simples

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x &= 3\left[\ln|x+1|\right]_0^1 - 2\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 \\ &= 3\ln 2 - 1\end{aligned}$$

Exercice 4

En faisant apparaître des sommes de Riemann de fonctions bien choisies sur l'intervalle $[0,1]$, *déterminer les limites suivantes :*

1.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(n-k).$$

1.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{k\times 1}{n}\right)$$

avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$$

2.
$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
avec $f(x) = x(1-x)$, donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

Pour le prochain exercice on rappelle l'inégalité des accroissements finis :
Pour toute fonction $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$,
$$|g(t) - g(\alpha)| \leq |t-\alpha| \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |g'(x)|.$$

Exercice 5

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n \geq 1$, on considère la somme de Riemann de f selon la méthode des rectangles à gauche
$$S_n(f) := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$
Notons $M := \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

1. *Vérifier que*
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left(f(t) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\mathrm{d}t.$$
2. *En déduire que*
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n(f)\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$
3. *Application algorithmique : On considère $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[a,b] = [0,1]$. Donner un majorant de M (à la main). Écrire alors un algorithme donnant une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ à ε près.*

1. Immédiat en remarquant que l'intervalle $[a,b]$ est l'union disjointe des sous-intervalles $\left[a + k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$, dont la longueur de chacun vaut $\frac{b-a}{n}$.
2. Par inégalité triangulaire et majoration en module de l'intégrale,
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - S_n(f)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left|f(t) - f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|\mathrm{d}t.$$

Pour tout k fixé entre 1 et n, l'inégalité des accroissements finis donne que pour tout $t \in I_k := \left[a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right]$,

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right| &\leq \left| t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right| \times \sup_{x \in I_k} |f'(x)| \\
&\leq \left(t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \times \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| \\
&= M \left(t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left| f(t) - f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right| \mathrm{d}t &\leq M \int_{a+\frac{k(b-a)}{n}}^{a+\frac{(k+1)(b-a)}{n}} \left(t - \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \mathrm{d}t \\
&= M \int_0^{\frac{b-a}{n}} x \mathrm{d}x \\
&= M \frac{(b-a)^2}{2n^2}
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée en sommant pour k allant de 0 à $n-1$.

3. $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ donc un majorant de M est 2. Or on a $\frac{2(1-0)^2}{2n} \leq \varepsilon$ si et seulement si $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, d'où l'algorithme suivant :

   Data : epsilon>0
   Result : Valeur approchée de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ à epsilon près
   S = 0;
   n = math.floor(1/epsilon) + 1;
   for *k from 0 to n-1* **do**
   | S = S + math.exp(-(k/n)**2)
   end
   return S/n

Exercice 6

Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{(x^2+x+1)^2}$ *et de* $g : x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$.

On écrit

$$\frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Pour le premier terme du membre de droite, une primitive est

$$-\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Pour le second, on fait le changement de variable $t = x + \frac{1}{2}$. Avec la notation du cours, en notant I_k une primitive de $(t^2+3/4)^{-k}$ pour la variable t, une intégration par parties de I_1 donne

$$I_1 = \frac{t}{t^2 + 3/4} + 2I_1 - \frac{3}{2}I_2$$

c'est-à-dire,

$$I_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2+3/4} + I_1\right)$$

où $I_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t}{\sqrt{3}})$.
D'où finalement en revenant à la variable x, une primitive de $f(x)$ est

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Pour calculer une primitive de g, on applique la règle de Bioche : en changeant x en $-x$, on remarque que $g(x)\mathrm{d}x$ est inchangé, donc on pose le changement de variable $t = \cos x$, ce qui donne $\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$ et donc

$$\begin{aligned}\int g(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}(-\mathrm{d}t)\\ &= \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= t - 2\arctan t + C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle.