

Ce document regroupe les mots-clés et concepts importants de chaque chapitre de mathématiques de 1ère année à l'IPSA. La numérotation des chapitres suit exactement celle des cours en ligne de la plateforme IONISX.

— Ma111 —

Algèbre et géométrie 1

(Ma11 sur IONISX)

1 Logique

Quantificateurs, tables de vérité "et" "ou" "non" "implication" "équivalence", contraposée d'une implication, assertion dépendant d'un paramètre, négation d'assertion avec \forall et \exists .

2 Raisonnement

Raisonnement direct, cas par cas, contraposition, par l'absurde, contre-exemple, récurrence.

3 Ensembles

Ensemble (collection d'éléments), ensemble vide, appartenance \in , non appartenance \notin , inclusion \subset , égalité, ensemble de parties, complémentaire, union \cup , intersection \cap , règles de calculs (priorités, distributivité, commutativité... de \cup , \cap , et c), produit cartésien.

4 Applications : image directe, image réciproque, antécédents

Application (fonction), graphe, composition, identité, image directe, image réciproque, antécédent.

5 Injection, surjection et bijection

Application injective, surjective, bijective, bijection réciproque.

6 Ensembles finis

Ensemble fini, cardinal, opérations avec les cardinaux d'ensembles finis (cardinal d'une union/intersection de deux ensembles, cardinal d'un ensemble privé d'un autre), liens avec injectivité/surjectivité/bijektivité, nombre d'applications possibles entre deux ensembles finis, nombre de bijections entre un ensemble fini et lui-même, cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini, coefficients binomiaux, formule du binôme de Newton.

Dénombrement (voir TD)

p -liste, arrangement, combinaison, formule du crible de Poincaré (pour deux ensembles, et pour trois ensembles).

7 Nombres complexes

Théorème de d'Alembert-Gauss, nombre complexe, addition et multiplication de deux nombres complexes, partie réelle et partie imaginaire, conjugué, module, inégalité triangulaire, démonstration de l'identité du parallélogramme à l'aide des nombres complexes.

8 Racines carrées, équations du second degré

Racine carrée d'un nombre complexe, méthode pour calculer des racines carrées, résolution d'équations du second degré à coefficients complexes.

9 Argument et trigonométrie

Notation trigonométrique des nombres complexes, argument, propriétés sur les arguments (argument du produit, de l'inverse, de l'opposé, du conjugué), formule de Moivre, notation exponentielle des nombres complexes, racine n -ième, formules d'Euler, développement et linéarisation d'expressions en cosinus et sinus.

10 Géométrie et nombres complexes

Affixe d'un point du plan, équation complexe d'une droite, équation complexe d'un cercle, lignes de niveaux $\frac{MA}{MB} = k$.

11 Introduction aux polynômes

Polynôme, coefficients, polynôme nul, polynôme constant, $\mathbb{K}[X]$, degré, opérations (égalité, addition, multiplication, multiplication par un scalaire), $\mathbb{R}_n[X]$, monôme, terme dominant, coefficient dominant, polynôme unitaire.

12 Division euclidienne

B divise A (ou A est un multiple de B), théorème de division euclidienne, quotient, reste, méthode de division euclidienne.

13 Racine d'un polynôme et factorisation

Racine (ou zéro) d'un polynôme, multiplicité (ou ordre) d'une racine, théorème de D'Alembert-Gauss, polynôme irréductible, théorème de décomposition, caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

14 Fractions rationnelles

Fraction rationnelle, théorème de décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} , partie polynomiale, éléments simples, méthode pratique pour trouver la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle, théorème de décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} .

— Ma112 —

Analyse 1

(Ma12 sur IONISX)

1 Nombres réels

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, relation (relation abstraite), relation d'ordre, relation d'ordre totale, \mathbb{R} est archimédien, partie entière, valeur absolue, inégalité triangulaire, seconde inégalité triangulaire, intervalle de \mathbb{R} , intervalle ouvert, voisinage.

2 Borne supérieure

Maximum, minimum, majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, caractérisation de la borne supérieure.

3 Introduction aux suites numériques

Suite, terme (ou terme général) d'une suite, suite majorée, suite minorée, suite bornée, suite (dé)croissante, suite strictement (dé)croissante, suite monotone.

4 Limite d'une suite numérique

Limite d'une suite, limite infinie, suite convergente, suite divergente, unicité de la limite, opérations sur les limites (addition, multiplication par un scalaire, multiplication, inverse), [convergente \Rightarrow bornée], formes indéterminées (« $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », « 1^∞ », ...), théorème des gendarmes.

5 Exemples remarquables de suites numériques

Suite géométrique, série géométrique, critère de convergence d'une suite vers 0.

6 Théorèmes de convergence

Théorème de la convergence monotone, suite harmonique, suites adjacentes, théorème des suites adjacentes, suite extraite (ou sous-suite) critère de divergence, théorème de Bolzano-Weierstrass.

7 Notions de fonction

Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, domaine de définition, graphe, opérations sur les fonctions (somme, produit, multiplication par un scalaire), fonction majorée, minorée, bornée, (dé)croissante, strictement (dé)croissante, monotone, strictement monotone, paire, impaire, périodique.

8 Limite d'une fonction réelle

Limite (in)finie en un point, limite (in)finie en plus ou moins l'infini, unicité de la limite, opérations avec les limites finies (addition, multiplication par un scalaire, multiplication, inverse), limite d'une composée de fonctions, formes indéterminées, théorème des gendarmes.

9 Continuité en un point

Continuité en un point, continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues en un point (addition, multiplication par un scalaire, multiplication, inverse), continuité d'une composée de fonctions, prolongement par continuité, caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

10 Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires, image directe d'un intervalle par une fonction continue, image directe d'un segment par une fonction continue.

11 Fonctions monotones et bijections

Rappels sur la bijectivité, théorème de la bijection.

12 Dérivée d'une fonction en un point et sur un intervalle

Fonction dérivable en un point, nombre dérivé, fonction dérivable sur un intervalle, dérivée, équation de la tangente en un point, [dérivable] \Rightarrow [continue].

13 Calcul de dérivées

Opérations sur les fonctions dérivables (somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse, quotient), dérivées des fonctions usuelles, dérivée d'une composée de fonc-

tions, dérivée d'une bijection réciproque, dérivée seconde, dérivée n -ième, formule de Leibniz.

14 Extremum local et théorème de Rolle

Point critique, maximum/minimum/extremum local, maximum/minimum/extremum global, [global] \Rightarrow [local], théorème donnant une condition nécessaire pour avoir existence d'un extremum, théorème de Rolle.

15 Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.

16 Logarithme et exponentielle

Logarithme népérien (ensemble de définition, dérivée, transformation produit en somme), logarithme en base a , logarithme décimal, exponentielle (ensemble de définition, dérivée, transformation somme en produit), $a^b = \exp(b \ln(a))$, comparaison entre $\ln(x)$ et x (et entre x et $\exp(x)$) quand $x \rightarrow +\infty$.

17 Fonctions circulaires inverses

Fonctions arccosinus arcsinus et arctangente (définitions, ensembles de départ et d'arrivée, dérivées, graphes).

18 Fonctions hyperboliques

Fonctions cosinus/sinus/tangente hyperbolique, et leurs bijections réciproques argument cosinus/sinus/tangente hyperbolique (définitions, ensembles de départ et d'arrivée, dérivées, graphes). Formules de trigonométrie hyperbolique.

19 Suites récurrentes

Suite récurrente, point fixe, condition nécessaire de convergence d'une suite récurrente associée à une fonction continue, convergence des suites récurrentes par une fonction croissante sur un intervalle stable, méthode d'étude de convergence lorsque la fonction est croissante, méthode lorsque la fonction est décroissante.

— Ma121 —

Analyse 2

(Ma13 sur IONISX)

1 Intégrale de Riemann

Subdivision, fonction en escalier, intégrale d'une fonction en escalier, intégrale d'une fonction bornée, intégrabilité au sens de Riemann, [continue \Rightarrow intégrable], [continue par morceaux \Rightarrow intégrable].

2 Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles, positivité, linéarité, majoration en valeur absolue.

3 Primitive d'une fonction

Primitive, quelques primitives de fonctions usuelles, lien entre primitive et intégrale (*théorème fondamental de l'analyse*), limite d'une somme de Riemann.

4 Intégration par parties et changement de variable

Théorème d'intégration par parties, théorème de changement de variable.

5 Intégration de fractions rationnelles

Méthode d'intégration de fractions rationnelles (voir schéma p.24 du TD), décomposition en éléments simples.

Hors programme : règles de Bioche.

6 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle, équation homogène associée, solution, structure de l'espace des solutions, solution à l'équation homogène, recherche d'une solution particulière (méthode par identification, méthode de *variation de la constante*).

7 Équations différentielles linéaires du second ordre

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, équation caractéristique associée à l'équation homogène, formes des solutions à l'équation homogène (trois cas), recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $P(t)e^{mt}$, théorème de superposition.

8 Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange (avec reste $f^{(n+1)}(c)$), inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

9 Développements limités au voisinage d'un point

Développement limité (DL), partie polynômiale du DL, ordre du DL, reste du DL, unicité du DL, $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

10 Opérations sur les développements limités

Somme, produit, composition, quotient, primitive.

11 Développements limités : applications

Calculs de limites, position d'une courbe par rapport à sa tangente, DL à l'infini.

— Ma122 —

Algèbre linéaire et géométrie

(Ma14 sur IONISX)

1 Introduction aux systèmes linéaires

(Un petit aperçu de quelques techniques de résolution de systèmes linéaires que vous allez aborder).

2 Théorie des systèmes linéaires

Équation linéaire, inconnues, système linéaire, coefficients, second membre, solution, ensemble des solutions, systèmes linéaires équivalents, systèmes homogènes.

3 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Système échelonné, système échelonné réduit, pivot, opérations élémentaires (3 opérations), méthode du pivot de Gauss (3 étapes).

4 Définition d'une matrice

Matrice, taille, coefficients, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrice carrée, diagonale, matrice nulle, somme de deux matrices, produit d'une matrice par un scalaire, opposée, différence, propriétés de l'addition (associatif, commutatif...)

5 Multiplication de matrices

Produit de deux matrices, propriétés du produit (associatif, non commutatif, distributif à gauche et à droite sur l'addition), matrice identité, symbole de Kronecker, puissances d'une matrice, formule du binôme de Newton pour des matrices carrées commutatives, matrice nilpotente.

6 Définition de l'inverse d'une matrice

Matrice inversible, inverse d'une matrice, $GL_n(\mathbb{K})$, unicité de l'inverse, inverse d'un produit de matrices inversibles.

7 Calcul de l'inverse d'une matrice

Formule de l'inverse d'une matrice 2×2 inversible, méthode d'inversion de Gauss d'une matrice carrée.

8 Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

Écriture sous forme matricielle d'un système linéaire, matrices élémentaires (dilatation, transvection, transposition), matrices équivalentes par lignes, matrice échelonnée, matrice échelonnée réduite.

9 Matrices triangulaires, matrice transposée, matrices symétriques

Matrice triangulaire inférieure, matrice triangulaire supérieure, matrice diagonale, matrice transposée, opérations avec la transposée, trace d'une matrice, opérations avec la trace, matrice symétrique, matrice antisymétrique.

10 Vecteurs

Vecteurs de \mathbb{R}^n , opérations sur les vecteurs (somme, multiplication par un scalaire), vecteur nul, espace vectoriel, écriture en ligne ou en colonne, produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

11 Exemples d'applications linéaires dans \mathbb{R}^n

Application linéaire, matrice d'une application linéaire.

12 Propriétés des applications linéaires

La composition d'applications linéaires revient à faire un produit matriciel. Une application linéaire est bijective si et seulement si sa matrice associée est inversible. Caractérisation d'une application linéaire, vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^p , expression de la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques.

13 Introduction aux espaces vectoriels

\mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} -EV), élément neutre, élément symétrique (ou opposé).

14 Propriétés d'un espace vectoriel

Loi interne, loi externe, vecteurs, scalaires. Commutativité, associativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique, distributivité. Quelques exemples (espaces de fonctions, de suites, de matrices, de polynômes).

15 Définition d'un sous-espace vectoriel

Sous-espace vectoriel (SEV), espace des solutions d'un système linéaire homogène = SEV de \mathbb{R}^q (où q est le nombre d'inconnues).

16 Combinaisons linéaires, caractérisation et intersection d'espaces vectoriels

Combinaison linéaire, coefficients d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, caractérisation d'un \mathbb{K} -EV par la notion de combinaison linéaire. L'intersection de deux SEV est un SEV.

17 Somme, sous-espace vectoriel engendré

Somme de deux SEV, somme directe, SEV supplémentaires dans un \mathbb{K} -EV. SEV engendré par un ensemble de vecteurs.

18 Définition d'une application linéaire

Application linéaire entre deux espaces vectoriels, application nulle et application identité. Endomorphisme.

19 Exemples d'applications linéaires

Dérivation, intégration, multiplication par X pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, transposition de matrices, trace d'une matrice.

20 Image et noyau d'une application linéaire

Image directe de l'espace vectoriel de départ par une application linéaire f (noté $\text{Im}(f)$), l'image d'un SEV par une application linéaire est encore un SEV. Noyau d'une application linéaire f (noté $\text{Ker}(f)$), le noyau d'une application linéaire est un SEV de l'espace de départ. [f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$]. Isomorphisme d'espaces vectoriels, automorphisme d'un espace vectoriel E (l'ensemble des automorphismes de E se note $\text{GL}(E)$).

21 Famille libre

Famille libre (ou vecteurs linéairement indépendants), famille liée (ou vecteurs linéairement dépendants).

22 Famille génératrice

Famille génératrice.

23 Base

Base = famille libre et génératrice, décomposition unique de tout vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de base, base canonique de \mathbb{R}^n , base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Théorème d'existence d'une base, théorème de la base incomplète.

24 Dimension d'un espace vectoriel

Dimension finie, théorème de la dimension, dimension, le cardinal de toute famille libre d'un EV de dimension n est inférieur ou égal à n , le cardinal de toute famille génératrice d'un EV de dimension n est supérieur ou égal à n .

25 Dimensions des sous-espaces vectoriels

Droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan. Théorème des quatre dimensions (appelée aussi "formule de Grassmann").

26 Rang d'une famille de vecteurs

Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice, matrice échelonnée en colonnes, opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, $[A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n]$, le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

27 Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une application linéaire, théorème du rang, théorème de bijection automatique pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

28 Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire entre deux bases.