

Ce document regroupe les mots-clés et concepts importants de chaque chapitre de mathématiques de 2^{ème} année à l'IPSA. La numérotation des chapitres suit exactement celle des cours en ligne de la plateforme IONISX.

— Ma211 et Ma212 —

Calcul différentiel et Intégrales

(Ma21 sur IONISX)

1 Topologie dans \mathbb{R}^2

Distance, norme, normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$, seconde inégalité triangulaire, normes équivalentes, disque ouvert, disque fermé, cercle, distance induite, partie bornée, partie ouverte, partie fermée, voisinage, intérieur, adhérence, frontière.

2 Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

Image d'un ensemble par une fonction, graphe d'une fonction, ligne de niveau, fonction partielle.

3 Limite et continuité d'une fonction de deux variables

Fonction définie au voisinage d'un point, limite d'une fonction en un point, continuité, prolongement par continuité.

4 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Dérivée directionnelle en un point selon un vecteur, nombre dérivé partiel, fonction dérivée partielle, gradient d'une fonction, dérivées partielles d'ordre supérieur, classe \mathcal{C}^k , théorème de Schwarz, matrice Hessienne.

5 Extrema locaux d'une fonction de deux variables

Minimum local, maximum local, extremum local/global, point critique, condition nécessaire extremum local, condition suffisante extremum local.

6 Différentiabilité d'une fonction de deux variables

Fonction différentiable, différentielle en un point, [différentiable \Rightarrow continue], relation différentielle et gradient, plan tangent, classe \mathcal{C}^1 , [$\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ différentiable], formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

7 Différentiabilité d'une fonction vectorielle

Fonction vectorielle, fonctions coordonnées, fonction vectorielle différentiable, dérivées partielles, règle de dérivation en chaîne, matrice jacobienne, formule de la jacobienne d'une composée, jacobien, \mathcal{C}^k -difféomorphisme, opérateurs divergence et rotationnel.

8 Formes différentielles

Forme différentielle, forme différentielle exacte, forme différentielle fermée, [exacte \Rightarrow fermée], ouvert étoilé, théorème de Poincaré.

9 Intégrales multiples

Quadrillage d'un rectangle, rectangle élémentaire, quadrillage régulier, intégrale double, propriétés de l'intégrale double (linéarité, intégrale sur une union de deux domaines disjoints, positivité, croissance, inégalité triangulaire), théorèmes de Fubini, jacobien, formule de changement de variables, coordonnées polaires et coordonnées elliptiques.

Pavage d'un pavé, pavé élémentaire, pavage régulier, intégrale triple, propriétés de l'intégrale triple (analogues à celles pour l'intégrale double), théorèmes de Fubini, formule de changement de variables, coordonnées polaires et coordonnées sphériques.

Courbes paramétriques

(non sur IONISX mais dans le cours Ma212) Arc paramétré de classe \mathcal{C}^p , support d'un arc paramétré, point simple/multiple, arc simple, arc fermé, point régulier, point singulier (ou stationnaire), équations cartésienne et paramétrique de la tangente en un point, point birégulier, point à allure normale, point d'inflexion, point de rebroussement de 1ère espèce/2nde espèce, branche infinie, asymptote, branche parabolique, réduction de l'intervalle d'étude, longueur d'un arc paramétré.

10 Intégrale curviligne

Chemin, paramétrage d'un chemin, lacet, intégrale curviligne, intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte, relation de Chasles, bord d'un compact vu comme une

réunion de lacets, orientation des lacets du bord d'un compact, théorème de Green-Riemann, calcul d'aire par la formule de Green-Riemann.

(non sur IONISX mais dans le cours Ma212) Flux d'un champ vectoriel, théorème de Green-Ostrogradsky (appelé aussi théorème de flux-divergence).

— Ma221 —

Espaces préhilbertiens et diagonalisation

(Ma23 sur IONISX)

1 Déterminant d'une matrice carrée - Définition

Matrice nulle, matrice identité, déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2, déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3, mineur, cofacteur, déterminant d'une matrice carrée d'ordre n , développement par rapport à une ligne ou une colonne. Propriétés du déterminant (multiplication par un scalaire, produit, transposée). Matrice inversible, caractérisation avec le déterminant. Méthodes de calcul du déterminant. Déterminant d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, d'une matrice de Vandermonde.

2 Déterminant d'une matrice carrée - Applications

Comatrice, calcul de l'inverse grâce à la comatrice. Formules de Cramer. Interprétation du déterminant comme un volume de paralléloèdre.

3 Généralités sur la diagonalisation des matrices

Valeur propre, sous-espace propre, stabilité. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe, les sous-espaces propres sont en somme directe. Polynôme annulateur, utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse d'une matrice.

4 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique, matrices semblables, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, valeur propre simple, multiplicité, spectre, théorème de Cayley-Hamilton.

5 Matrices diagonalisables

Matrice diagonalisable, caractérisation de la diagonalisation à l'aide des sous-espaces propres, dimension d'un sous-espace propre. Caractérisation de la diagonalisation grâce au polynôme caractéristique et à la somme des dimensions des sous-espaces propres. Cas où les valeurs propres sont toutes distinctes.

6 Applications de la diagonalisation

Calcul de la puissance d'une matrice carrée. Résolution de systèmes de suites récurrentes. Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

7 Généralités sur les espaces préhilbertiens

Forme bilinéaire, écriture à l'aide d'une matrice carrée dans le cas de la dimension finie, changement de base, forme bilinéaire symétrique, forme bilinéaire définie positive, produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien.

(non sur IONISX mais en complément de cours) Forme quadratique, forme polaire, noyau et rang d'une forme polaire, méthode de dédoublement d'indices, méthode de Gauss pour les formes quadratiques (décomposition en carrés).

8 Théorème de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Théorème de Cauchy-Schwarz, théorème de Minkowski, norme, norme associée à un produit scalaire.

9 Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie (définition, propriétés et exemples).

10 Famille orthogonale et orthonormée

Symbole de Kronecker, famille orthogonale, famille orthonormée, (famille orthogonale de vecteurs non nuls \Rightarrow famille libre), coordonnées d'un vecteurs à l'aide d'une base orthonormée, orthogonalisation de Gram-Schmidt.

11 Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

Théorème du supplémentaire orthogonal (+corollaire), projection orthogonale, distance à un sous-espace vectoriel.

— Ma222 —
— Séries et suites —
(Ma23 sur IONISX)

1 Généralités sur les séries numériques

Série, terme général d'une série, somme partielle, converge (CV), diverge (DV), série géométrique, critère de convergence d'une série géométrique, opérations sur les séries ($CV+CV=CV$, $CV+DV=DV$, $DV+DV=(CV \text{ ou } DV)$), reste d'une série convergente, télescopage, condition nécessaire de convergence, série harmonique.

2 Séries à termes positifs (1/2)

Série à termes positifs, convergence d'une série à termes positifs, théorème de comparaison, série de Riemann, convergence d'une série de Riemann, notations de Landau et critères de convergence, règle de Riemann.

3 Séries à termes positifs (2/2)

Règle de D'Alembert, règle de Cauchy.

4 Séries à termes quelconques

Série alternée, critère spécial des séries alternées, convergence absolue (CVA), série semi-convergente, $[CVA \Rightarrow CV]$

(chapitres 5 à 10 hors programme de Ma222)

— Séries, intégrales impropres —
(Ma24 sur IONISX)

1 Généralités sur les séries entières

Série entière, lemme d'Abel, rayon de convergence, disque de convergence. Règle de Cauchy et règle de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence, rayon de convergence d'une dérivée ou primitive, dérivabilité avec dérivées terme à terme, intégrabilité avec intégrales terme à terme.

2 Développement en série entière à l'origine

Fonction développable en série entière à l'origine, série de Taylor d'une fonction. Développement en séries de $\frac{1}{1-x}$, de $\exp(x)$, de $(1+x)^\alpha$ (obtention de développements d'autres fonctions par : combinaison linéaire, substitution, dérivation ou intégration).

3 Applications des séries entières

Exponentielle complexe, résolution d'équations différentielles linéaires.

4 Séries de Fourier

Fonctions continues par morceaux (cpm), fonctions périodiques, réduction du cas périodique au cas 2π -périodique. Polynôme trigonométrique, série trigonométrique, série de Fourier d'une fonction cpm 2π -périodique, coefficients de Fourier réels (trigonométriques), parité de la fonction et annulation des coefficients de Fourier.

5 Coefficients de Fourier complexes et espace \mathcal{D}

Produit scalaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel, espace \mathcal{D} des fonctions cpm 2π périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} valant la moyenne des limites à gauche et à droite en tout point de discontinuité, produit scalaire sur \mathcal{D} , famille orthonormée sur \mathcal{D} . Série de Fourier complexe, coefficients de Fourier complexes, lien entre coefficients de Fourier réels et complexes.

6 Théorèmes de Parseval et Lejeune-Dirichlet

Théorème de Parseval, fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux (\mathcal{C}^1 pm), théorème de Lejeune-Dirichlet.

7 Généralités sur les intégrales impropres

Intégrale impropre sur un intervalle $[a, b[$, sur un intervalle $]a, b]$, sur un intervalle $]a, b[$. Relation de Chasles, linéarité, croissance.

8 Intégrales impropres de fonctions positives

Fonction de Riemann, théorème sur les intégrales de Riemann, convergence de l'intégrale impropre d'une fonction positive, premier théorème de comparaison (avec \leq et \geq), deuxième théorème de comparaison (avec o , \mathcal{O} et \sim).

9 Autres critères

Critère intégral de Cauchy (comparaison avec une série), intégration par parties, changement de variable.

10 Convergence absolue d'une intégrale impropre

Convergence absolue d'une intégrale (CVA), $[CVA \Rightarrow CV]$, majoration en valeur absolue de l'intégrale, semi-convergence (intégrale CV mais pas CVA).