Numération : quelques notions et exercices
Solution des exercices

Valentin Bahier

06/04/2019

Exercice 1 ($\star$)

Convertir $(33{,}12)_4$ en base 16. Et en base 12 ? Et en base 15 ?

Solution de l'exercice 1

$$(33{,}12)_4 = 3\times 4^1 + 3\times 4^0 + 1\times 4^{-1} + 2\times 4^{-2} = 15 + \frac{3}{8} = (15{,}375)_{10}$$

- *en base 16 :*

$$\begin{aligned}(15{,}375)_{10} &= 15\times 16^0 + 6\times 16^{-1}\\ &= \boxed{(F{,}6)_{16}}\end{aligned}$$

- *en base 12 :*

$$\begin{aligned}(15{,}375)_{10} &= 1\times 12^1 + 3\times 12^0 + 4\times 12^{-1} + 6\times 12^{-2}\\ &= \boxed{(13{,}46)_{12}}\end{aligned}$$

  puisque $\frac{3}{8}\times 12 = 4+\frac{1}{2}$, *puis* $\frac{1}{2}\times 12 = 6$.

- *en base 15 :*

$$\begin{aligned}(15{,}375)_{10} &= 1\times 15^1 + 0\times 15^0 + 5\times 15^{-1} + 9\times 15^{-2} + 5\times 15^{-3} + 9\times 15^{-4} + \dots\\ &= \boxed{(10{,}59595959\dots)_{15}}\end{aligned}$$

  puisque $\frac{3}{8}\times 15 = 5+\frac{5}{8}$, *puis* $\frac{5}{8}\times 15 = 9+\frac{3}{8}$, *puis à nouveau* $\frac{3}{8}\times 15$ *etc...*

Exercice 2 ($\star$)

Effectuer l'addition, la multiplication, et la soustraction de $(31)_4$ par $(23)_4$.

Solution de l'exercice 2

L'addition donne $(120)_4$*, la multiplication* $(213)_4 + (1220)_4 = (2033)_4$*, et la soustraction* $(2)_4$.

Exercice 3 (★★)

Effectuer l'addition, la multiplication, et la soustraction de $(43{,}2)_6$ *par* $(51{,}5)_6$.

Solution de l'exercice 3

L'addition donne $(135{,}1)_6$*, la multiplication* $(34{,}44)_6 + (43{,}2)_6 + (3444)_6 = (4010{,}04)_6$*, et la soustraction* $-[(51{,}5)_6 + (12{,}4)_6 - (100)_6] = -(4{,}3)_6$.

Exercice 4 (★★)

Deviner une méthode générale de division en base b *(sans passer par la base* 10*), puis effectuer la division de* $(1030221)_4$ *par* $(12)_4$.

Solution de l'exercice 4

Il s'agit de la méthode de division apprise à l'école primaire. Dans ce qui suit, tous les nombres sont en base 4*. On lit le nombre* 1030221*.* 1 *est plus petit que* 12*,* 10 *aussi, mais* 103 *non. On commence donc par faire la division de* 103 *par* 12*. Grâce aux tables de multiplication et addition, on remarque que* $12 \times 2 = 30$*,* $12 \times 3 = 102$*. Donc on soustrait* 3×12 *à* 103*, ce qui donne* 1*, et donc le quotient commence par le chiffre* 3*. On écrit alors* 1 *en reste et on reporte à côté du* 1 *le chiffre suivant dans le nombre de départ, à savoir* 0*, ce qui fait* 10*.* 10 *étant plus petit que* 12*, on reporte encore le chiffre d'après et on met* 0 *après le* 3 *dans la case du quotient, on a* 102*, donc rebelote, et ainsi de suite. Finalement, le résultat de la division est* $30301{,}2$.

Exercice 5 (★★)

Montrer que pour tout entier $\ell \geq 1$*, et tous chiffres* $a_1, \ldots, a_\ell$,

$$0{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_\ell}{\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ chiffres}}}$$

Solution de l'exercice 5

Il suffit de remarquer que

$$10^\ell \times 0{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell} = a_1 a_2 \ldots a_\ell{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell} = a_1 a_2 \ldots a_\ell + 0{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell}$$

d'où

$$0{,}\underline{a_1 a_2 \ldots a_\ell} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_\ell}{10^\ell - 1}.$$

Exercice 6 ($\star$)

À l'aide du résultat de l'exercice 5, mettre sous forme de fraction irréductible les nombres suivants : $0,\underline{78}$ *,* $1,\underline{740}$ *, et* $0,\underline{0099}$*.*

Solution de l'exercice 6

$$0,\underline{78} = \boxed{\frac{78}{99}}$$

qui est bien irréductible car $78 = 2^2 \times 13$ *et* $99 = 3^2 \times 11$.

$$1,\underline{740} = 1 + \frac{740}{999} = 1 + \frac{2^2 \times 5 \times 37}{3^3 \times 37} = 1 + \frac{20}{27} = \boxed{\frac{47}{27}}.$$

$$0,\underline{0099} = \frac{99}{9999} = \frac{3^2 \times 11}{3^2 \times 11 \times 101} = \boxed{\frac{1}{101}}.$$

Exercice 7 ($\star\star\star$)

Montrer que tout nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal ne peut pas avoir pour période 9*.*

Solution de l'exercice 7

Soit x *un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal, s'écrivant sous forme de fraction irréductible* $\frac{m}{n}$*. Les divisions euclidiennes de* $10^i m$ *par* n *ne donnent jamais* 0 *(puisque* n *contient un facteur premier différent de* 2 *et* 5*). Ecrivons comme dans la démonstration du Théorème 2 les quotients* q_i *et les restes* r_i *dans les divisions euclidiennes successives.*
Une période 9 *signifierait qu'il existe un entier* i_0 *tel que* $q_i = 9$ *pour tout* $i \geq i_0$*. Fixons un tel* i_0*. Alors on a pour tout* $i > i_0$,

$$10 r_{i-1} = n \times 9 + r_i$$

c'est-à-dire

$$n - r_i = 10(n - r_{i-1}) = \cdots = 10^{i-i_0}(n - r_{i_0}).$$

Or $n - r_{i_0} \geq 1$ *et alors* $10^{i-i_0} \leq 10^{i-i_0}(n - r_{i_0}) = n - r_i < n$*, ce qui est absurde puisque cela n'est pas vrai dès que* i *est suffisamment grand.*

Exercice 8 ($\star\star$)

Trouver la longueur de la période de $\frac{90}{7}$ *sans calculer explicitement la période. Même question avec* $\frac{3}{65}$*, puis* $\frac{5}{51}$*.*

Solution de l'exercice 8

- *Déjà,* 90 *est premier avec* 7 *et* $7 = 2^0 \times 5^0 \times 7$. *On va donc effectuer les congruences modulo* 7 *des puissances successives de* 10. *(Si on est à l'aise et qu'on a anticipé sur la proposition d'après, on a juste à tester les puissances qui divisent* $\varphi(7) = 6$*).*

$$10 \equiv 3 \mod 7, \quad 10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \mod 7, \quad 10^3 \equiv 3 \times 2 \equiv -1 \mod 7$$

donc l'ordre multiplicatif de 10 *modulo* 7 *vaut* 6*, et donc la longueur de la période de* $\frac{90}{7}$ *vaut* $\boxed{6}$.

- 3 *et* 65 *sont premiers entre eux, et* $65 = 5 \times 13$*, donc la longueur de la période de* $\frac{3}{65}$ *vaut l'ordre multiplicatif de* 10 *modulo* 13. *On a*

$$10 \equiv -3 \mod 13, \quad 10^2 \equiv (-3)^2 \equiv -4 \mod 13, \quad 10^3 \equiv (-3)\times(-4) \equiv -1 \mod 13$$

donc l'ordre vaut $\boxed{6}$ *(cela ne peut pas être* 4 *sinon cela voudrait dire que* 4 *divise* 6*).*

- *Pour les avancés :* $\varphi(51) = \varphi(3 \times 17) = 2^5$.

$$10^2 \equiv -2 \mod 51, \quad 10^4 \equiv 4 \mod 51, \quad 10^8 \equiv 16 \mod 51, \quad 10^{16} \equiv 1 \mod 51$$

donc la longueur de $\frac{5}{51}$ *vaut* $\boxed{16}$.

Exercice 10 (★★)

Dresser la liste de tous les entiers n *entre* 2 *et* 31 *tels que la période de* $\frac{1}{n}$ *est de longueur maximale.*

Solution de l'exercice 10

Ce sont : $2, 7, 17, 19, 23, 29$. 31 *ne l'est pas.*

Exercice 11 (*Défi*)

Démontrer le Théorème 1.

Solution de l'exercice 11

Le principe est le même que pour la preuve du théorème 2*, en décomposant* b *en facteurs premiers et en évacuant les cas du début de la preuve.*

Exercice 12 (★★)

1) *Exhiber un nombre irrationnel qui n'est pas un nombre univers.*
2) *Exhiber un nombre univers qui n'est pas un nombre normal.*

Solution de l'exercice 12

1) *Par exemple en base* 3 *:* 1,010010001000010000001...
2) *Par exemple en base* 10 *:* 0,1020030000004000000000000000000000000005...
(concaténation de tous les nombres, où les nombres i et $i+1$ sont espacés de $i!$ zéros).

Exercice 13 ($\star\star\star$)

Construire un nombre simplement normal en base 10*, qui n'est pas rationnel.*

Solution de l'exercice 13

Par exemple on prend le nombre rationnel $0,\underline{0123456789}$ *auquel on greffe un chiffre (n'importe lequel, par exemple* 0*) à la position 2^i après la virgule, pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Exercice 14 ($\star\star\star\star$)

Construire un nombre normal en base 2*.*

Solution de l'exercice 14

Je ne sais pas s'il existe une construction déterministe qui permette de montrer de manière simple la normalité. En revanche, une construction stochastique avec une preuve abordable consiste en une suite de "pile ou face" indépendants (pile : 0, face : 1). Construction due à Emile Borel.

Exercice 15 (*Bonus*)

En quelle base sont numérotés les exercices ?

Solution de l'exercice 15

9.