Soutien CPI A1
- Séance 11 -

Valentin Bahier

10/12/2020

Le but de cette séance est de voir que l'intégration sur un segment se généralise assez naturellement à un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ grâce à la notion de limite introduite lors de la séance précédente.

• Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, et soit

$$F : \begin{array}{l} [a,b[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

la primitive de f qui s'annule en a.

— Si F admet une limite finie en b, on dit que l'**intégrale généralisée** de f entre a et b **converge** et on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x).$$

— Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **diverge**.

Exercice 1 (*Intégrales de Riemann (partie 1)*)

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *converge t-elle ?*

Exercice 2 (*Famille exponentielle*)

Pour quelles valeurs du réel λ, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}t$ *converge t-elle ?*

• Le cas $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ est symétrique :
l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si la limite de $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers a existe et est finie.

Exercice 3 (*Intégrales de Riemann (partie 2)*)

Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge t-elle ?

• Enfin, le cas $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ se traite en découpant en deux morceaux :

$$]a, b[=]a, c] \cup [c, b[$$

pour un certain réel c choisi entre a et b.

— Si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Cette dernière égalité est connue sous le nom de **relation de Chasles** pour les intégrales.

— Si une des deux converge et l'autre diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

— Si les deux divergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ou diverge (on pourrait en dire davantage en introduisant des outils supplémentaires, mais ces outils sont hors programme).

Remarque : Attention donc, la relation de Chasles qui était toujours valable pour les intégrales sur un segment ne l'est plus tout le temps pour les intégrales généralisées ! D'une manière générale il faut retenir que pour avoir le droit de séparer une intégrale en plusieurs autres, toutes les intégrales doivent converger.

Exercice 4

Pour chacune des intégrales généralisées suivantes, déterminer si elle converge ou diverge.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t.$$

La méthode d'intégration par parties que vous connaissez pour les intégrales sur un segment ne s'étend pas aux intégrales généralisées. La méthode de changement de variables en revanche oui, au sens où on peut montrer que les changements de variables préservent la nature de l'intégrale généralisée (ne transforment pas une intégrale divergente en intégrale convergente et vice versa). Cependant, quelle que soit la méthode d'intégration choisie, il est toujours préférable de commencer par se placer sur un segment inclus dans l'intervalle d'intégration, de faire le calcul sur ce segment, et enfin de passer à la limite.

Exercice 5

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent, et donner leurs valeurs exactes.

$$I_4 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \textit{(faire le changement de variables } t = 1/x\textit{).}$$

$$I_5 = \int_1^{+\infty} x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \qquad \textit{(intégrer par parties).}$$