Soutien CPI A1
- Séance 13 -

Valentin Bahier

07/01/2020

Dans cette séance, nous allons parler indépendamment d'analyse dimensionnelle, de chiffres significatifs et d'incertitudes.

1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle s'emploie dans différents domaines scientifiques pour vérifier (et même prévoir dans certains cas) des relations entre grandeurs physiques. Par exemple, toute vitesse doit être homogène à une longueur divisée par une durée. Si donc en manipulant une équation de départ faisant intervenir une vitesse on ne parvient pas à exprimer cette vitesse comme une longueur divisée par une durée, c'est que l'équation n'est pas satisfaite.

L'analyse dimensionnelle se base généralement sur exactement 7 grandeurs physiques de référence :

Grandeur	**Dimension**	**Unité SI**
Longueur	L	m (mètre)
Masse	M	kg (kilogramme)
Temps	T	s (seconde)
Intensité électrique	I	A (ampère)
Température thermodynamique	Θ	K (kelvin)
Quantité de matière	N	mol (mole)
Intensité lumineuse	J	cd (candela)

La dimension d'une grandeur physique se note souvent avec des crochets. Par exemple, une surface S a pour dimension

$$[S] = \mathrm{L}^2.$$

Hormis quelques grandeurs physiques exotiques, les dimensions s'expriment toutes comme

$$\mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^\beta \mathrm{T}^\gamma \mathrm{I}^\delta \Theta^\varepsilon \mathrm{N}^\zeta \mathrm{J}^\eta,$$

pour certains entiers relatifs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$. Par exemple, une accélération a a pour dimension

$$[a] = \mathrm{L}.\mathrm{T}^{-2}.$$

Exercice 1 (*Quelques grandeurs physiques classiques*)

Compléter le tableau suivant

Grandeur	***Dimension***	***Unité SI***
vitesse		
accélération		
force		
travail (énergie)		
puissance		
fréquence		
charge électrique		
tension électrique		
résistance électrique		

Exercice 2 (*Homogénéité de formules physiques*)

Pour chacune des formules suivantes, vérifier l'homogénéité.

1.
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = C(t_2 - t_1)ma^2$$
où $\vec{F}$ est une force, $\vec{v}$ un vecteur vitesse, C une constante sans dimension, t_1 et t_2 des temps, m une masse, et a une accélération.

2.
$$\|\overrightarrow{OM}\| = \frac{v^2}{2a}$$
où $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur de l'espace à trois dimensions, v une vitesse et a une accélération.

3.
$$\frac{P}{I^2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$
où R_1 et R_2 sont des résistances, P une puissance, et I une intensité.

2 Chiffres significatifs

Lorsqu'on écrit un nombre décimal x par la méthode positionnelle (l'écriture à laquelle nous sommes les plus habitués utilisant les chiffres de 0 à 9 et éventuellement une virgule), le nombre de chiffres significatifs de x est le nombre de chiffres qui composent l'écriture de x, **en ne comptant pas les 0 du début** (s'il y en a). Par exemple :

- 4, 0.3, 0.0009 ont un seul chiffre significatif.
- 50, 0.044, 8.3 ont deux chiffres significatifs.
- 807, 0.0208, 31.1 ont trois chiffres significatifs.

Lorsque les nombres représentent des mesures physiques, le nombre de chiffres significatifs donne une idée de la précision de ces mesures. Par exemple, si on mesure la hauteur d'un immeuble, une mesure indiquant 92 mètres est moins précise qu'une autre indiquant 92.34 mètres. En effet, la première mesure nous informe que la hauteur réelle de l'immeuble est comprise entre 91 et 93 mètres, tandis que la deuxième nous informe que cette hauteur est comprise entre 92.33 et 92.35 mètres.

Dans un contexte de valeurs mesurées, il convient alors de distinguer par exemple 3.7 de 3.70 ou encore de 3.70000 car ces nombres, même s'ils sont mathématiquement les mêmes, ne représentent pas les mêmes précisions de mesures.

Souvent, on est amené à faire des opérations entre plusieurs valeurs mesurées qui n'ont pas forcément le même nombre de chiffres significatifs. Voici les deux principales règles de calculs qui permettent de savoir combien de chiffres significatifs laisser aux résultats :

$\hookrightarrow$ Règle d'addition ou soustraction
Le résultat d'une addition ou soustraction doit comporter autant de **chiffres après la virgule** que la donnée qui en possède le moins. Par exemple :

$$2.08 + 5.1 = 7.2$$

$$100 - 3.77 = 96$$

$\hookrightarrow$ Règle de multiplication ou division
Le résultat d'une multiplication ou division doit comporter autant de **chiffres significatifs** que la donnée qui en possède le moins. Par exemple :

$$20.628 \times 3.0 = 62$$

$$42.06 \div 8.2956201 = 5.070$$

Il arrive parfois que l'on ne parvienne pas directement à écrire le bon nombre de chiffres significatifs pour le résultat. Par exemple, si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux longueurs valant respectivement 2.7m et 9023m, alors d'après la règle de calcul ci-dessus le résultat de $\ell_1 \times \ell_2$ doit comporter deux chiffres significatifs, et alors on est bien embêté car le produit comporte cinq chiffres avant la virgule... on a en fait deux solutions pour écrire le résultat : soit on change l'unité de la grandeur physique, soit on utilise la notation scientifique avec des puissances de 10. Ainsi, en reprenant l'exemple,

$$\ell_1 \times \ell_2 = 2.4 \text{ hectares}$$

ou

$$\ell_1 \times \ell_2 = 2.4 \times 10^5 \text{ m}^2.$$

Exercice 3 (*Opérations avec des données*)

Utiliser les règles de calculs pour exprimer les résultats des opérations suivantes avec les bons nombres de chiffres significatifs :

$$a = 35.002 - 8.3 \qquad d = 4.77 \times 40$$
$$b = 15.1 + 1901 - 1799.7 \qquad e = 1.4 \times 1.4 \div 8.64$$
$$c = -79.70 - 8007.3 \qquad f = (94035.265 + 31.9733) \times 0.00047$$

3 Incertitudes de mesures

Lorsque l'on effectue une mesure d'une grandeur, on commet toujours une erreur par rapport à la réalité. Cette erreur peut dépendre par exemple de la qualité de l'appareil de mesure, de l'habileté de celui qui prend la mesure, de perturbations...

L'**incertitude absolue** d'une mesure est l'écart maximum possible entre la mesure et la valeur exacte. Si g est le résultat d'une mesure effectuée, l'incertitude absolue se note alors Δg et la valeur exacte de la grandeur mesurée se situe entre $g - \Delta g$ et $g + \Delta g$. L'incertitude absolue est à ne pas confondre avec l'**incertitude relative** qui est le rapport entre Δg et g, c'est-à-dire $\dfrac{\Delta g}{g}$, exprimé habituellement en pourcentage.

Les incertitudes sont généralement écrites avec ***un seul chiffre significatif***. Ainsi, on écrit par exemple que la durée exacte en jours d'une révolution de la Terre autour du soleil vaut

$$365.25 \pm 0.01 \text{ (avec incertitude absolue)}$$

$$365.25 \pm 0.003\% \text{ (avec incertitude relative)}$$

(en réalité bien sûr on peut obtenir une meilleure précision, c'est juste un exemple).

L'incertitude absolue se comporte bien avec les additions et les soustractions mais mal avec les multiplications et les divisions ; c'est l'inverse pour l'incertitude relative. Plus précisément, les règles de calculs sont les suivantes :

↪ Règle des incertitudes absolues

$$g = a + b - c \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c.$$

↪ Règle des incertitudes relatives

$$g = a^\alpha b^\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Delta g}{g} = |\alpha| \frac{\Delta a}{a} + |\beta| \frac{\Delta b}{b}.$$

où a, b, c sont des données positives, et α, β sont des réels.

D'une manière générale, pour des opérations plus compliquées (faisant intervenir par exemple des fonctions trigonométriques ou exponentielles), on peut toujours recourir à la **méthode des extrêmes** qui consiste à calculer les valeurs extrêmes que peut prendre le résultat. Par exemple, si la fonction exponentielle est appliquée à 3.94 ± 0.07, alors le résultat est supérieur à

$$\exp(3.87) \approx 47.9$$

et inférieur à

$$\exp(4.01) \approx 55.1$$

donc le résultat s'écrit

$$51 \pm 4.$$

Exercice 4 (*Coût trajet Toulouse-Narbonne*)

Vous souhaitez vous offrir un petit week-end plage à Narbonne. Vous avez votre voiture pour y aller mais vous vous demandez si cela ne serait pas plus intéressant de prendre le train. Vous allez comparer les coûts de trajets aller (car le coût du retour est identique) entre la voiture et le train.

1. *Calculez votre coût en carburant sachant que vous consommez* 6.3 ± 0.6 *litres tous les 100 kilomètres, que le prix du litre est* 1.27 ± 0.09 *euros, et que vous avez* 142 ± 1 *kilomètres à parcourir.*
2. *Pour obtenir le coût total en voiture, ajoutez le péage de l'autoroute* 13.40 *euros.*
3. *En consultant les billets de train, vous trouvez des prix allant de* 10 *à* 26.50 *euros. Est-ce que tous ces billets de trains sont moins chers que le coût total en voiture ?*