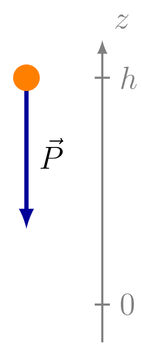
Soutien CPI A1
- Séance 14 -

Valentin Bahier

14/01/2020

Exercice 1 (***Chute libre verticale***)

On lâche une balle de masse m à une hauteur h du sol à l'instant $t = 0$. On aimerait connaître l'évolution de la position de la balle au cours du temps jusqu'à ce que la balle touche le sol. On néglige les frottements de l'air. La balle n'est soumise qu'à son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$.



1. *Montrer que la vitesse v de la balle au cours du temps a pour expression*

$$v = -gt.$$

   Remarque : attention, la vitesse v est exprimée ici algébriquement (elle est négative, car évolue dans le sens opposé à celui de l'axe (Oz)).

2. *En déduire l'expression de la position z de la balle au cours du temps.*
3. *A quel instant t_1 la balle touche-t-elle le sol ?*
4. *Application numérique : lors d'une partie de pétanque endiablée, un adversaire parie avec vous que si vous lâchez votre boule de pétanque 50cm au-dessus de son pied, il aura le temps de retirer son pied avant que la boule lui tombe dessus. Vous considérez que le temps de réaction moyen pour effectuer n'importe quel geste simple après un stimulus visuel vaut 0.25s. Acceptez-vous le pari ?*

Dans ce premier exercice, il nous a été relativement facile d'obtenir l'expression de la vitesse puis de la position, directement par intégration. Toutefois, cela se complique dès que l'on ajoute ou modifie certaines hypothèses (par exemple on ne négligeant plus les forces de frottements), et alors il s'agit bien souvent de résoudre des ***équations différentielles***, comme nous allons nous en apercevoir dans cette séance.

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** est une équation de la forme

$$y'(t) + ay(t) = f(t) \qquad (E)$$

où $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}$. L'inconnue de cette équation (E) est la fonction y, qu'on suppose dérivable sur I.
La résolution de (E) se fait en deux étapes :

— 1ère étape : on résout l'**équation homogène** associée à (E), c'est-à-dire l'équation sans second membre

$$y'(t) + ay(t) = 0 \qquad (E_0).$$

Les solutions à (E_0) sont les fonctions

$$y_H : t \mapsto C\mathrm{e}^{-at}, \quad C \in \mathbb{R}$$

— 2ème étape : on cherche une solution particulière à (E), notée y_P. La méthode diffère suivant la forme du second membre f (on ne détaille pas ici).

La solution générale à l'équation (E) est $\boxed{y_H + y_P}$.

Exercice 2 (***Un exemple d'équation différentielle linéaire du premier ordre***)

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$y' + 3y = t + 1 \qquad (E)$$

1. *Montrer que les solutions à l'équation homogène*

$$y' + 3y = 0 \qquad (E_0)$$

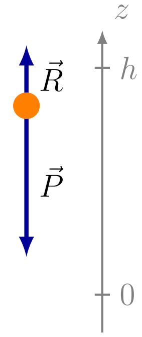
sont les fonctions

$$y_H : t \mapsto C\mathrm{e}^{-3t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. *Déterminer les réels α et β pour que la fonction $y_P : t \mapsto \alpha t + \beta$ soit solution particulière de (E).*
3. *Conclure.*
4. *Trouver l'unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = 1$.*

Exercice 3 (***Chute verticale avec frottements***)

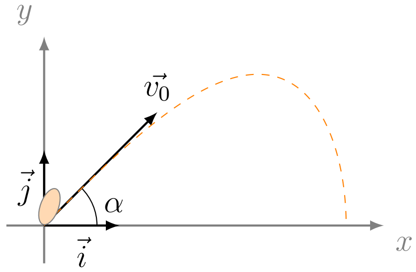
On reprend le cadre de l'exercice 1 en ne négligeant plus la force de résistance de l'air $\vec{R} = -fm\vec{v}$, où f est un coefficient de frottement.



1. *Par une analyse dimensionnelle, déterminer la dimension du coefficient f.*
2. *Exprimer la vitesse v puis la position z de la balle au cours du temps.*

Exercice 4 (*Portée d'un tir de ballon de rugby*)

Un joueur frappe au sol un ballon de rubgy de masse m à l'instant $t = 0$. Le ballon part à une vitesse initiale v_0 avec un angle α par rapport au sol.



On suppose que le ballon en l'air est seulement soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force de frottements de l'air $\vec{R} = -fm\vec{v}$.

1. *En écrivant $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, montrer que v_x et v_y vérifient*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + fv_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + fv_y = -g \end{cases}.$$

2. *En déduire les expressions de v_x et v_y, puis des coordonnées x et y du ballon au cours du temps.*
3. *Pour l'angle $\alpha = 45°$ et la vitesse initiale $v_0 = 35\mathrm{m.s}^{-1}$ définis par le tir du joueur, on admet que la vitesse limite verticale v_{lim} du ballon est atteinte lors de sa descente et vaut $16\mathrm{m.s}^{-1}$. Déterminer la valeur de f correspondante (on donne $g = 9.8\mathrm{m.s}^{-2}$).*
4. *En admettant que e^{-ft} est négligeable à l'instant $t = t_1$ où le ballon atterri, calculer t_1 et en déduire la portée du tir.*