Soutien CPI A1
- Séance 15 -

Valentin Bahier

21/01/2020

Un **polynôme** P est une expression mathématique de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

où les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels (ou complexes) appelés **coefficients** de P.

Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que n est le **degré** de P, noté $\deg(P)$. Le coefficient a_n est appelé **coefficient dominant**, et le terme $a_n X^n$ le **terme dominant**.

Le **polynôme nul** est $P(X) = 0$. Le degré du polynôme nul vaut $-\infty$ par convention.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

X est l'**indéterminée**.

La méthode de division euclidienne pour les polynômes est très similaire à celle pour les entiers. Voyons tout de suite un exemple pour comprendre de quoi il s'agit :

Soit $A(X) = 2X^2 + 5X - 1$ et $B(X) = X + 1$.
Pour faire la **division euclidienne de** A **par** B, on commence par disposer A et B comme suit

$$\begin{array}{rrr|ll} 2X^2 & +5X & -1 & X & +1 \\ \cline{4-5} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}$$

On soustrait à A autant de fois B que possible de sorte à éliminer le terme de plus haut degré de A (en multipliant B par un polynôme) : ici on retranche donc $2XB = 2X^2 + 2X$.

$$\begin{array}{rrr|ll} 2X^2 & +5X & -1 & X & +1 \\ \cline{4-5} \ominus 2X^2 & +2X & & 2X & \\ \cline{1-2} & 3X & -1 & & \\ & & & & \end{array}$$

Le symbole "moins entouré" $\ominus$ n'est pas un symbole officiel mais signifie simplement que l'on fait une soustraction de TOUT le polynôme (comme si on mettait des parenthèses). Il ne faut donc pas oublier de distribuer le "moins" sur TOUS les termes du polynôme par lequel on soustrait. Ainsi par exemple,

$$\ominus 2X^2 + 2X = -(2X^2 + 2X) = -2X^2 - 2X.$$

On continue ensuite en procédant de même jusqu'à obtenir un reste de degré strictement inférieur à celui de B. Ici, comme $\deg(3X-1) = 1 = \deg(X+1)$, on doit bien faire une étape supplémentaire. On retranche $3B = 3X + 3$:

$$\begin{array}{rrr|l}
2X^2 & +5X & -1 & X+1 \\ \cline{4-4}
\ominus 2X^2 & +2X & & 2X+3 \\ \cline{1-2}
 & 3X & -1 & \\
 & \ominus 3X & +3 & \\ \cline{2-3}
 & & -4 &
\end{array}$$

Comme $\deg(-4) = 0 < 1 = \deg(B)$, on s'arrête. D'où finalement l'écriture

$$A = BQ + R$$

avec $Q(X) = 2X + 3$ et $R(X) = -4$. Le polynôme Q est appelé le **quotient**, et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Exercice 1 (*Divisions euclidiennes de polynômes*)

Faire la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

1) $A(X) = X^2 - 1,\ B(X) = 2X + 1$
2) $A(X) = 3X^3,\ B(X) = X^2$
3) $A(X) = 2X,\ B(X) = 4X^2$
4) $A(X) = -X^3 + X,\ B(X) = X - 1$
5) $A(X) = X^4 - 2X + 2,\ B(X) = -X^2 + 2X$
6) $A(X) = 2X^2 - \dfrac{4}{3},\ B(X) = \dfrac{3}{5}X - 1$

On dit que B **divise** A, lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exercice 2 (*Divisibilité entre polynômes*)

Quels sont les cas de l'exercice précédent pour lesquels B divise A ?

On dit que α est une **racine** du polynôme P lorsque $P(\alpha) = 0$. Une propriété remarquable est que α est une racine de P si, et seulement si, le polynôme $X - \alpha$ divise P.

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow X - \alpha \text{ divise } P}.$$

Voyons maintenant quelques applications pratiques de la division euclidienne de polynômes.

Exercice 3 (*Lever des formes indéterminées*)

1. *Déterminer la limite quand x tend vers 4π de*

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}.$$

2. *Déterminer la limite quand x tend vers 2 de*

$$\frac{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}{x^3-x^2-x-2}$$

Exercice 4 (*Intégrale d'une fraction rationnelle*)

Calculer

$$I=\int_1^2 \frac{x^3+x+3}{x+1}\mathrm{d}x.$$

Une **fraction rationnelle** F est un quotient de polynômes

$$F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}.$$

Bientôt, vous verrez la méthode de **décomposition en éléments simples** qui consiste à décomposer des fractions rationnelles en somme de termes "simples" du type

$$\frac{a}{(X-\alpha)^m}$$

pour mieux les manipuler (très utile notamment pour l'intégration et la dérivation). La méthode démarrera toujours par la division euclidienne de P par Q.