Soutien CPI A1
- Séances 5 et 6 -

Valentin Bahier

22/10/2020 et 05/11/2020

Rappel *(Définitions et notations)*
i est un nombre imaginaire dont le carré vaut -1. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Les nombres $z \in \mathbb{C}$ s'expriment généralement de trois manières :

- $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est l'**écriture algébrique** de z.
- $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'**écriture exponentielle complexe** de z.
- $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'**écriture trigonométrique** de z.

Le **conjugué** de z est $\overline{z} = a - ib = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.
Le **module** de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$.
L'**argument** de z est $\mathrm{Arg}(z) = \theta$.
La **partie réelle** de z est $\mathrm{Re}(z) = a = r\cos(\theta)$.
La **partie imaginaire** de z est $\mathrm{Im}(z) = b = r\sin(\theta)$.

Exercice 1 (*Quelques propriétés*)

Montrer les propriétés suivantes pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
2. $|zz'| = |z||z'|$
3. $z\overline{z} = |z|^2$
4. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
5. $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$, *à un multiple de* 2π *près.*
6. $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$, *à un multiple de* 2π *près.*
7. $\mathrm{Arg}(-z) = \mathrm{Arg}(z) + \pi$, *à un multiple de* 2π *près.*

Exercice 2 (*Écriture algébrique*)

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $z_1 = (2+i)^2 - 3(1-2i)$

2) $z_2 = -(1-3i)^2 + (2-i)^2$

3) $z_3 = 4 - (1+i)^3$

4) $z_4 = \dfrac{1}{1+2i}$

5) $z_5 = \dfrac{2+5i}{2-3i}$

6) $z_6 = 1 - i + |2+i|^2$

7) $z_7 = \overline{(1-4i) \times 5i}$

8) $z_8 = (\overline{3i + \overline{3+2i}})$

Exercice 3 (*Écriture exponentielle complexe*)

Mettre sous forme exponentielle complexe les nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

2) $z_2 = 5 + 5i$

3) $z_3 = 6 - 2\sqrt{3}i$

4) $z_4 = \dfrac{1-i}{2}$

5) $z_5 = \dfrac{4}{i}$

6) $z_6 = i^{11}$

7) $z_7 = (\sqrt{3} - i)^{10}$

8) $z_8 = 1 + \mathrm{e}^{it}$ *où* $t \in \mathbb{R}$ *fixé*

Exercice 4 (*Écriture trigonométrique*)

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -5$

2) $z_2 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$

3) $z_3 = 2 - 2i$

4) $z_4 = \sin(\theta) + i\cos(\theta)$ *où* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixé*

Exercice 5 (*Équations dans* $\mathbb{C}$)

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ *suivantes, et représenter géométriquement leurs solutions :*

1) $z = \overline{z}$

2) $\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$

3) $|z+2| = 0$

4) $|z-5| = 3$

5) $|1-z| = |1+z|$

6) $|1-z| = 2|1+z|$

Exercice 6 (*Formule de Moivre*)

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exercice 7 (*Racines n-ièmes de l'unité*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Déterminer l'ensemble des nombres complexes* z *tels que*

$$z^n = 1.$$

2. *Montrer que si* z *est solution de l'équation ci-dessus et* $z \neq 1$*, alors*

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

Exercice 8 (*Formules d'Euler*)

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$*,*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice 9 (*Calcul de* $\cos(\pi/5)$)

1. *Montrer que* $2\cos(\pi/5)$ *est solution de*

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Indication : on pourra s'aider des résultats des deux exercices précédents.

2. *En déduire la valeur exacte de* $\cos(\pi/5)$*.*