Soutien CPI A1
- Séances 7 et 8 -

Valentin Bahier

12/11/2020 et 19/11/2020

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, et $f : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & u(t) + iv(t) \end{array}$. On suppose que u et v sont continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b u(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ existent et on définit l'intégrale de f entre a et b comme

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est un nombre complexe. De plus, on remarque immédiatement que

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t.$$

Exercice 1 (*Calculs pour s'échauffer*)

Calculer

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t$$

Rappel : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Toutes les techniques d'intégration que vous connaissez (changement de variables, intégration par parties, primitives) s'appliquent aussi à des fonctions à valeurs complexes. Concernant la recherche de primitives, c'est encore le procédé inverse de la dérivation. Or, les calculs de dérivées se généralisent très simplement. En effet, f est dérivable en un réel t si et seulement si u et v sont dérivables en t, et dans ce cas

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Exercice 2 (*Exponentielle d'une fonction à valeurs complexes*)

1. *Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{it}\right) = i\mathrm{e}^{it}.$$
2. *Refaire les calculs des intégrales* I_1 *et* I_2 *de l'exercice précédents en utilisant directement une primitive.*
3. *Plus généralement, montrer que pour toute fonction dérivable* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{g(t)}\right) = g'(t)\mathrm{e}^{g(t)}.$$

Exercice 3 (*Calculs d'intégrales par primitivation*)

Calculer

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{(2+3i)t}\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_0^{\pi/3} t\mathrm{e}^{it^2}\mathrm{d}t$$
$$I_4 = \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{2it}}{i}\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_0^{\pi/3} t\sin(t^2)\mathrm{d}t$$

Indication : pour le calcul de I_6 *on pourra se servir de la valeur de* I_5.

Exercice 4 (*Majoration en module de l'intégrale*)

Avec les notations introduites au tout début de la séance, montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Indication : démarrer en écrivant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *sous sa forme exponentielle complexe* $r\mathrm{e}^{i\theta}$.

En électricité, le nombre complexe i est souvent noté j pour ne pas le confondre avec une intensité. On le notera donc j dans l'exercice qui suit. De plus, à tout signal réel sinusoïdal de la forme
$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
on associera le signal complexe
$$\underline{x}(t) = A\mathrm{e}^{j(\omega t+\phi)}.$$

Exercice 5 (*Circuit RLC en série*)

On considère un circuit électrique RLC en série (voir FIGURE *1) parcouru par un courant alternatif sinusoïdal*

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

- I_m *est l'**intensité maximale** (amplitude du signal), exprimée en Ampères.*
- ω *est la **pulsation**, exprimée en radians par seconde (liée à la période* T *du signal par la relation* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$*).*
- t *est le **temps**, exprimé en secondes.*
- ϕ *est la **phase à l'origine**, exprimée en radians.*

1. *Exprimer la tension totale* u *en fonction des trois tensions* u_R, u_L et u_C.
2. *Rappeler les relations liant l'intensité* i *à chacune des tensions* u_R, u_L et u_C.
3. *Montrer que pour tout* $t > 0$,
$$\frac{\mathrm{d}\underline{i}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{i}(t)$$
où $\underline{i}(t) = I_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \phi)}$.
4. *Déduire des réponses aux trois premières questions que le signal complexe de la tension totale est lié à celui de l'intensité par la relation*
$$\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}$$
où
$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$
$\underline{Z}$ *est appelé l'**impédance** du circuit.*
5. *Déterminer l'expression de la **tension maximale*** U_m*, ainsi que celle du **déphasage*** φ *entre la tension et l'intensité dans le circuit, de sorte à pouvoir écrire*
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \phi + \varphi).$$
6. *Déterminer la pulsation* ω_0 *pour laquelle* U_m *est minimale. Pour cette pulsation on dit qu'il y a **résonance**. Remarquer que le déphasage* φ *est nul dans ce cas. L'intensité et la tension sont alors deux signaux **en phase**.*
7. *On définit la **valeur efficace*** I_{eff} *de l'intensité par*
$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i(t))^2 \mathrm{d}t}.$$
Montrer que
$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$
I_{eff} *correspond à la valeur de l'intensité d'un courant continu qu'il faudrait mettre à la place du courant alternatif afin de garder le même échauffement global moyen du circuit.*

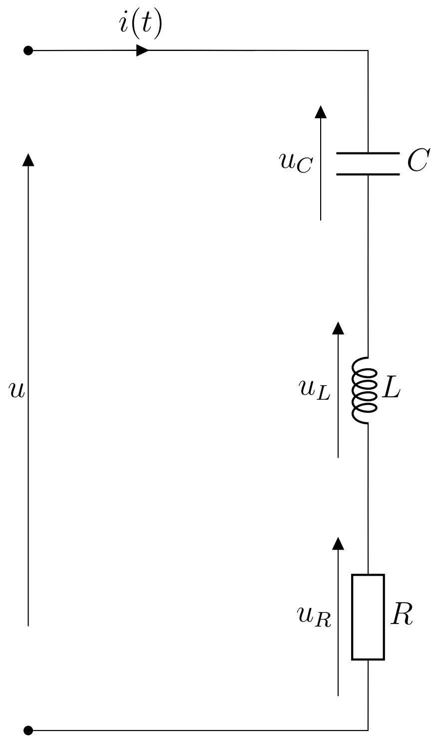

Figure 1 – Circuit RLC en série