Soutien CPI A1
- Séances 9 et 10 -

Valentin Bahier

26/11/2020 et 03/12/2020

Rappel ***(Définitions et propriétés importantes sur les suites)***

Une **suite de nombres réels** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, notée habituellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un de ses termes u_n, appelé **terme général**.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq M.$$
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$m \leq u_n.$$
- **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe $B > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leq B.$$
- **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. Dans ce cas on écrit
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
Elle est dite **divergente** sinon (soit parce que la limite est infinie, soit parce que la limite n'existe pas).
- **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \geq u_n.$$
- **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leq u_n.$$
- **stationnaire** si u_n est constant à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe un réel c et un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$u_n = c.$$

Voici schématiquement quelques liens d'implications importants entre ces notions :

$$\begin{tikzcd} & \text{croissante et majorée} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \text{stationnaire} \arrow[r, Rightarrow] & \text{convergente} \arrow[r, Rightarrow] & \text{bornée} \\ & \text{décroissante et minorée} \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Certaines suites peuvent être entièrement définies par la donnée de leur premier terme u_0 (ou quelquefois plusieurs premiers termes) et d'une **relation de récurrence**, c'est-à-dire une relation liant le terme d'après aux termes d'avant. C'est le cas par exemple de la **suite de Fibonacci** définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Deux autres exemples importants de telles suites sont les suivants :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + r.$$
Dans ce cas le terme général s'écrit
$$u_n = u_0 + nr.$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = q \times u_n.$$
Dans ce cas le terme général s'écrit
$$u_n = u_0 \times q^n.$$

r et q sont appelés la **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 1 (*Comportement des suites arithmétiques et géométriques*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. En utilisant les définitions du début,

1. *que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque* $\begin{cases} r < 0 \text{ ?} \\ r = 0 \text{ ?} \\ r > 0 \text{ ?} \end{cases}$

2. *que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque* $\begin{cases} q = 0 \text{ ?} \\ 0 < q < 1 \text{ ?} \\ q = 1 \text{ ?} \\ q > 1 \text{ ?} \\ q = -1 \text{ ?} \\ -1 < q < 0 \text{ ?} \\ q < -1 \text{ ?} \end{cases}$

Exercice 2 (*Comportement des séries géométriques*)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. *En déduire le comportement de S_n quand n tend vers l'infini (suivant la valeur de q).*

Exercice 3 (*Une suite arithmético-géométrique*)

Pour acheter la PS5, vous faîtes un prêt à la banque de 500€ à un taux mensuel de $0,5\%$. Vous choisissez de rendre 20€ à la fin de chaque mois à la banque.

1. *Au bout de combien de mois aurez-vous remboursé totalement votre prêt ?*
2. *Quel est le montant total de l'intérêt payé ? En déduire le taux d'intérêt global du prêt.*
3. *Que se passe t-il si chaque mois au lieu de rendre 20€ vous rendez $2,50$€ ? Et seulement 2€ ?*

Pour répondre à ces questions on commencera par formaliser le problème en introduisant des notations littérales pour désigner le montant initial, le taux mensuel, la mensualité, le reste à payer à la fin de chaque mois, etc...

Une petite pause détente avec cette histoire drôle avant de poursuivre :

> Une infinité de mathématiciens entrent dans un bar. Le premier commande une pinte, le deuxième une demi-pinte, le troisième un quart de pinte, le quatrième un huitième de pinte, etc... Le barman sert deux pintes et s'exclame :
> « Ah vous les mathématiciens, vous ne connaissez vraiment pas vos limites ! »

Nous rappelons maintenant la notion de limites pour les fonctions, puis nous faisons le lien avec les suites.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

- On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en un point $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a - \delta, a + \delta], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in [B, +\infty[, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Caractérisation séquentielle de la limite : Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
[f admet une limite ℓ en a] $\Longleftrightarrow$ [pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, $f(u_n)$ tend vers ℓ].

Dans ce cas on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Exercice 4 (*Une fonction n'admettant pas de limite*)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 (*Signaux périodiques convergents*)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique admettant une limite en $+\infty$.
Montrer que f est constante.

D'autres outils que les suites existent pour étudier des limites de fonctions. Par exemple, on peut parfois utiliser le théorème des gendarmes (exercice 6), ou réussir à écrire la fonction comme un taux d'accroissements (exercice 7).

Exercice 6

Montrer

$$\lim_{t\to 0} t^3 e^{5i/t^2} = 0, \qquad \lim_{u\to+\infty} \frac{5u^2+2u-4}{3u^2+1} = \frac{5}{3}.$$

Exercice 7

Montrer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{x} = i, \qquad \lim_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1.$$

Exercice 8 (*Convergence vers l'exponentielle*)

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x.$$